This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 3 976 415

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Class

NERAL

MATHESIS

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences
Professeur ordinaire à l'Université de Gand
Docteur spécial en sciences mathématiques, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences
Professeur à l'Athénée royal
et à l'École des mines de Liège

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS

TOME PREMIER

ANNÉE 1881

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

1881

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN

QA1
M34
v.1

TABLE DES MATIÈRES(*).

(Pour les rectifications, voir p. 32, 48, 80, 88, 150.)

ARITHMÉTIQUE : ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Questions d'examen (J. N.) 16, 32, 63
×Question 25; solutions par MM. J. Neuberg et S. Realis 73
×Théorèmes sur les nombres (J. N.) 87
×Sur les carrés des nombres entiers (J. N.) 88
Démonstration élémentaire et généralisation de quelques théorèmes de M. Berger; par M. E. Cesáro 99
×Théorie des fractions périodiques (P. M.) 103
×Carré magique de la Villa Albani; communiqué par M. E. Catalan . . . 121
Questions d'arithmétique par M. Ed. Lucas 134
×Question 22; solution par M. Pullich 161
×Question 48; solution par MM. Rochetti et Visalli Saya. 165

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Questions de mathématiques élémentaires (J. N.). 27
Discussion de l'équation du troisième degré; d'après E. Liebrecht (P. M.) . 38
×Question 1; solution par M. Verhelst; note de MM. Charlier et Prévost . 42, 58
×Questions d'examen (J. N.) 63, 79, 117, 152,
×Question 27; solutions par MM. F. Fouquet et E. Verhelst 76
×Question 19; solution par M. A. Van Glabbeke 94, 113
×Sur la sommation de certaines séries; d'après M. E. Catalan (P. M.) . . . 139
×Sur les carrés égaux à la somme de plusieurs carrés; par M. Dostor . . . 156
×Décomposition d'une somme de n carrés en une somme de n ou de $(n+1)$ autres carrés; par M. Dostor 157
×Sur une somme de cubes; par M. S. Realis 176
×Définition du mot limite (P. M.) 193
Question 7; solutions par MM. H. Brocard et J. Neuberg 198

×GEOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Généralisation d'une propriété des podaires (P. M.). Note M. E. Catalan. 7, 58
Questions de mathématiques élémentaires (J. N.) 7, 26
Sur l'évaluation approchée des aires planes (P. M.) 17, 33

(*) On a renvoyé, pour chaque question traitée à tous les passages où l'on s'occupe de cette question. Plusieurs articles sont indiqués dans deux ou trois subdivisions de la table des matières. Les articles marqués d'une croix peuvent être compris en ne s'aidant que des mathématiques élémentaires (P. M.)

106243

Pages.

Question 13; solution par M. P. Ruex 29
Question 16; solution par A. Van Glabbeke 29
Question 2; solution par MM. E. Clevers et S. B. Note par M. J. Neuberg. 43, 66
Question 5; solutions par MM. Verhelst et Prévost 47
Question 11; solution (J. N.) 60
Question 21; solutions par MM. Günther, Verhelst, Ruex et J. Neuberg. . 61
Question 23; solution par Edm. Van Aubel 72
Question 30; solution par Edm. Van Aubel 78
Question 4; solutions par MM. H. Van Aubel, E. Van Aubel, A. Doneux Ruex, Mister, S. B. 90
Question 10; solution par M. H. Van Aubel 91
Question 14; solution par M. H. Van Aubel 93
Sur les figures semblables (Question 42) (J. N.) 106
Partage des polygones; par MM. M. d'Ocagne et Euzet 109
Question 31; solution par M. Van Glabbeke 116
Question 40; solutions par MM. Edm. Van Aubel, E. Duyckaerts, M...., Pisani, H. Brocard 117
Question 35; solution par MM. Brocard et Pisani 119
Question 49; solution par M. A. Lambert 131
Question 20; solution par M. H. Brocard; note de M. J. Neuberg . . . 148, 159
Questions 18, 59-61; solutions (P. M.) 151
Sur le centre des médianes antiparallèles (J. N.) 153, 173, 185
Expressions simples des volumes de deux corps de révolution; par M. Dostor 157
Question 41; solution par M. E. Van Aubel 163
Questions 55 et 56; solution par M. P. Interdonato 166, 167
Note sur un théorème de M. Laisant (J. N.). 166
Question 51; solutions par MM. Pisani et Rochetti 179
Sur un hexagone équilatéral, inscrit à un triangle donné; d'après M. Jefábek (J. N.). 191
Question 50; solution par M. J. Neuberg 200
Question 69; solution par M. E. Van Aubel 202

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Sur un lieu géométrique; par MM. Ruex et J. Neuberg 53
Question 11; solution par M. V. Jamet 59
Notes de géométrie analytique; par M. Ed. Lucas 65
Puissance d'un point par rapport à une conique à centre; par M. Barbarin. Note de M. G. T. 85, 156
Sur les figures semblables (Question 29) (J. N.) 106
Question 28; solution par MM. Brocard, S. B., Jamet. 113
Ecole polytechnique de Paris. Concours de 1881. Solution par M. H. Brocard 122
Sur une application de l'algèbre directive (J. N.) 123
Question 6; solution par M. E. Cesáro 127
Question 36; solution par M. E. Lemoine et P. Serret 129
Sur le centre des médianes anti-parallèles (J. N.) 153, 173, 185
Questions 62, 63; solutions par M. Jamet 179, 180
Question 64; solutions par M. Mister 182

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Pages.

Courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un hélicoïde à plan directeur; par M. Verstraeten et M. Mister 49, 137
Equation d'un angle, d'un rectangle, d'un losange ; par MM. Jos. Plateau et J. Neuberg 89
Question 15; solution par M. F. Pisani; note de M. J. Neuberg 145
Sur les foyers des courbes planes; d'après MM. E. Gibert et Niewenglowski (P. M.) 155

ANALYSE INFINITÉSIMALE.

Démonstration élémentaire du théorème de Taylor pour les fonctions d'une variable imaginaire (P. M.) 3
Sur une nouvelle formule de calcul différentiel; d'après M. G. Teixeira (P. M.) 23
Question 12; solutions par M. E. Clevers et H. Brocard 28, 71
Sur une série; par MM. Ch. Hermite, E. Catalan, Baehr. 37, 58
Sur la série harmonique; par M. E. Cesáro. 51, 143
Sur une intégrale définie (P. M.) 67
Note sur la logocyclique ou strophoïde; d'après M. S. Günther 81
Exercice de géométrie infinitésimale; par M. Ph. Gilbert 97
Sur les solutions singulières des équations différentielles totales; d'après J. Petersen (P. M.) 155
Sur la série harmonique et la formule de Stirling (P. M.) 169
Questions 62, 63; solutions par M. Jamet 179, 180
Question 64; solution par M. Mister. 182

CALCUL DES PROBABILITÉS, MÉCANIQUE, ETC.

×Sur un nouveau principe des probabilités; d'après M. Bienaymé (P. M.) . . 10
×Question 4; solutions par M. H. Van Aubel, E. Van Aubel, Doneux, Ruex, Mister, S. B. 90

BIBLIOGRAPHIE ET BIOGRAPHIE.

E. Catalan. Cours d'Analyse (P. M.) 11
Albert Namur (P. M.) 39
McLellan. The Teacher Hand-Book of Algebra (P. M.). 70
Schoonjans. Précis d'Arithmétique et Theoretische Rekenkunde (P. M.) 110
Le nom et la date de la mort de Tartaglia; d'après un mémoire de M. B. Boncompagni (P. M.) 144
E. Gelin. Traité d'Arithmétique élémentaire (P. M.). 145
N. Breithof. Traité de Géométrie descriptive 158
J. P. De Moor. Leçons de Géométrie descriptive 159
Algrain. Leçons de Géométrie descriptive. 160
Schoentjes. Cours élémentaire de Géométrie descriptive 160
E. Rouché et de Comberousse. Eléments de Géométrie. 160
Archimedis Opera omnia; par S. Günther. 169

SUPPLEMENT.

Sur l'évaluation approchée des aires planes (P. M.) 1-64

QUESTIONS.

	POSÉE Page	RÉSOLUE Page
×1	12	42, 58
×2	12	43, 66
3	12	
×4	13	90
×5	13	47
6	13	126, 127
7	13	198
×8	13	
×9	14	190
×10	14	91
11	14	59
12	15	28, 71
×13	15	29
×14	15	93
15	15	145
×16	16	29, 42, 47
17	30	
×18	30	Supp. 32
×19	31	94, 113
×20	31	148
×21	31	61
×22	31	161
×23	31	72, 113
×24	31	
×25	48	73
26	48	
×27	48	76
28	48	113
29	48	106
×30	62	78
×31	62	116
32	62	
33	62	
×34	62	
×35	78	128
36	78	129
37	78	
38	79	
39	79	
×40	79	117
×41	95, 118	163
×42	95	106
43	95	
×44	95	
×45	95	
46	95	
47	96	
×48	96	165
×49	96	131
×50	96	
×51	96	179
52	96	
53	118	
54	118	
×55	118	166
×56	118	167
×57	119	
58	119	
×59	135	Supp. 30
×60	135	Supp. 32
×61	135	Supp. 35
62	135	179
63	136	180
64	136	182
×65	136	
×66	136	
67	168	
×68	168	
×69	168	
×70	168	
71	168	
×72	168	
73-78	184	
79-100	203-207	

TABLE DES AUTEURS 208

PRÉFACE.

Le nouveau journal, dont nous commençons aujourd'hui la publication, sous le nom de *Mathesis* (*), est, en quelque sorte, la continuation de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, fondée, en 1874, par M. Catalan, professeur à l'université de Liège, et par l'un de nous. Notre savant collègue a dirigé seul ce dernier recueil, de 1876 à 1880, et l'a élevé, peu à peu, au dessus du modeste programme formulé en tête du tome premier, de manière à lui attirer d'illustres collaborateurs, parmi lesquels nous citerons MM. Hermite, Cremona, E. Lucas, J. W. L. Glaisher. M. Catalan, ayant renoncé à la publication de la *Nouvelle Correspondance*, qui, par son caractère trop élevé, ne répondait peut-être pas tout à fait aux besoins de l'enseignement en Belgique, nous nous sommes décidés à faire paraître un nouveau journal de mathématiques, encouragés que nous étions par M. Catalan lui-même.

(*) Μάθησις = *discendi actio, cognitio, doctrina*, en grec classique ; en latin ancien, *mathesis* = *astrologie* et, quelquefois, *mathématiques ;* en latin moderne, ce dernier sens a prévalu.

Quant au programme de la *Mathesis*, nous ne pouvons mieux le faire connaître qu'en reproduisant, avec quelques modifications, une partie de la préface du recueil auquel elle fait suite :

Notre journal s'occupera, principalement, des parties de la science mathématique enseignées dans les classes supérieures des établissements d'instruction moyenne et dans les cours des Écoles spéciales. Nous essayerons, en particulier, de vulgariser la connaissance des parties les moins abstraites de la géométrie supérieure et de l'algèbre moderne. Nous espérons entreprendre aussi l'examen approfondi de certaines questions capitales de méthodologie mathématique, telles que la théorie des incommensurables, celle des quantités négatives et celle des imaginaires.

Nous publierons, dans chaque numéro : 1° des articles originaux; 2° des solutions de questions choisies; 3° des analyses, extraits, comptes-rendus ou traductions de mémoires ou d'ouvrages, de manière à tenir nos lecteurs au courant de la science, autant que le permet le cadre de notre recueil.

Nous serons forcés d'en exclure les articles absolument trop élémentaires et ceux qui, par leur caractère même, figureraient mieux dans les recueils académiques. Entre ces deux limites, nous accueillerons avec plaisir tous les articles intéressants qu'on voudra bien nous envoyer.

P. Mansion.
J. Neuberg.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

MATHESIS

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE TAYLOR POUR LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE.

1. *Notations.* I. Nous posons, suivant l'usage,

$$i = \sqrt{-1}.$$

Nous écrivons, avec M. Weierstrass, $\mathrm{R}(\alpha + \beta i)$, pour désigner la partie réelle α d'une expression imaginaire, $\mathrm{I}(\alpha + \beta i)$, pour en désigner la partie imaginaire βi.

II. Dans ce qui suit, x, y sont des variables réelles, $z = x + yi$, une variable imaginaire. Nous représentons par

$$\mathrm{F}z = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

une fonction de z, continue pour toutes les valeurs de z que nous considérons, et ayant une dérivée unique $\mathrm{F}'z$, continue pour les mêmes valeurs. Il en résulte, comme l'on sait, les équations de condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{1}$$

et aussi

$$\mathrm{F}'z = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

III. Dans ces diverses relations, les dérivées indiquées au moyen de la caractéristique ∂, sont des dérivées partielles par rapport aux *lettres* x, y, regardées comme indépendantes. Plus bas, quand nous supposerons y fonction de x, nous indiquerons au moyen de la caractéristique $\frac{d}{dx}$, une dérivée totale par rapport à la *variable* x.

2. *Formule fondamentale.* Soit $y = \chi x$ l'équation d'une courbe continue passant par les deux points $a(x_0, y_0)$, $b(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, et soient

$$z_0 = x_0 + y_0 i, \quad \mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}i.$$

Je dis que

$$\mathrm{F}\mathrm{Z} - \mathrm{F}z_0 = \int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \mathrm{F}'z\,dz, \tag{2}$$

le second membre de cette relation désignant la limite de la somme de toutes les valeurs de $F'zdz$, quand x, y, prennent les valeurs correspondants aux différents points de la courbe ab, ou $y = \chi x$, de manière que $dy = \chi' x dx$.

Nous avons, en effet, successivement, d'après les équations (1) :

$$\begin{aligned} F'zdz &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)(dx + idy) \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\psi}{\partial x}dy\right) + i\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x}dy\right) \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\chi' x\right)dx + i\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\chi' x\right)dx \\ &= \left(\frac{d\varphi}{dx} + i\frac{d\psi}{dx}\right)dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{Z} F'zdz &= \int_{x_0}^{X}\left(\frac{d\varphi}{dx} + i\frac{d\psi}{dx}\right)dx \\ &= \Big[\varphi(x, y) + i\psi(x,y)\Big]_{x_0, y_0}^{X, Y} = FZ - Fz_0. \end{aligned}$$

3. *Théorème de Taylor.* Soient

$$fz, f'z, f''z, \ldots\ldots, f^{n-1}z, f^n z$$

une fonction et ses n dérivées, continues le long de la courbe ab.

Posons, dans la formule (2)

$$Fz = fZ - \left[fz + \frac{Z-z}{1}f'z + \frac{(Z-z)^2}{1.2}f''z + \cdots + \frac{(Z-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}z\right],$$

nous obtiendrons le théorème de Taylor, ou plutôt de Cauchy,

$$fZ = fz_0 + \frac{Z-z_0}{1}f'z_0 + \frac{(Z-z_0)^2}{1.2}f''z_0 + \cdots + \frac{(Z-z_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}z_0 + r_n,$$

$$r_n = \int_{z_0}^{Z}\frac{(Z-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n zdz. \qquad (A)$$

4. *Formes du reste données par MM. Darboux et Falk.* Désignons par p, p_1, p_2 trois quantités positives non supérieures à n, par $\theta, \theta_1, \theta_2$ des quantités comprises entre 0 et l'unité, par μ une autre quantité non négative et non supérieure à l'unité, et enfin par ν un certain angle.

En prenant pour la ligne $y = \chi x$, la droite qui joint les points a, b, nous pouvons mettre r_n sous l'une des formes suivantes :

$$r_n = \mu e^{\nu i} \frac{(Z - z_0)^n}{1.2 \ldots n} \frac{n(1-\theta)^{n-p}}{p} f^n [z_0 + \theta (Z - z_0)], \qquad (B)$$

$$r_n = R\left[\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots n} \frac{n(1-\theta_1)^{n-p_1}}{p_1} fz_1\right] + I\left[\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots n} \frac{n(1-\theta_2)^{n-p_2}}{p_2} fz_2\right] \qquad (C)$$

$$z_1 = z_0 + \theta_1 (Z - z_0), \quad z_2 = z_0 + \theta_2 (Z - z_0).$$

La première forme est due à M. Darboux (*Journal de Liouville, continué par Resal*, septembre 1876, 3me série, t. II, p. 291-294), qui l'obtient par une méthode différente, c'est-à-dire, sans trouver préalablement notre expression (A) du reste. La seconde a été donnée par M. Falk (Mémoire présenté à la Société des Sciences d'Upsal, le 19 juillet 1877). La forme (C) conduit plus facilement que la forme (B), à la formule fondamentale relative aux vraies valeurs des expressions qui prennent la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

5. *Applications.* Au moyen de l'une ou l'autre des deux dernières formes du reste, on peut établir aisément, d'une manière élémentaire, dans les cas où ils existent, le développement en série indéfinie des fonctions e^z, $l(1 + z)$, $(1 + z)^m$, z étant de la forme $x + yi$.

Au moyen de la formule fondamentale relative aux vraies valeurs des expressions qui prennent une forme indéterminée (formule que l'on tire de (C)), on peut aussi déduire, par une voie simple et rigoureuse, du théorème de l'addition des fonctions elliptiques, la théorie de la multiplication et de la transformation de ces fonctions (*).

6. *Démonstration de la formule de M. Falk, par la méthode de Cox.* En recourant uniquement au théorème de Rolle, on démontre sans difficulté la formule suivante analogue à (2), mais moins précise :

$$FZ - Fz_0 = R[(Z - z_0) F'z_1] + I[(Z - z_0) F'z_2]. \qquad (3)$$

(*) Voir notre *Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques*. Paris, Gauthier-Villars ; Gand, Hoste, 1870.

Appliquant cette relation, à la fonction

$$Fz = fZ - \left[fz + \frac{Z-z}{1} f'z + \frac{(Z-z)^2}{1.2} f''z + \cdots + \frac{(Z-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}z \right] - (Z-z)^n P,$$

où P est tel que $Fz_0 = 0$, et p successivement égal à p_1 et à p_2, nous obtenons de nouveau le théorème de Taylor, sous la forme (C).

Le procédé de démonstration précédent est une simple extension de celui que Homersham Cox a employé pour démontrer le théorème de Taylor, dans le cas d'une fonction d'une variable réelle. A un autre point de vue, il ne diffère pas essentiellement du procédé de M. Falk non plus; car le mathématicien suédois trouve la formule (C), en ajoutant le développement de la partie réelle au développement de la partie imaginaire de fz. Or, on démontre la formule (3), en cherchant, par le théorème de Rolle, la valeur de R (FZ — Fz_0) et celle de I (FZ — Fz_0) et les réunissant. CAUCHY arrive aussi de la même manière à une formule analogue à (C), dans la 13me leçon de son *Calcul différentiel*.

7. *Conclusion*. Il résulte, de ce qui précède, que nous pouvons déduire une théorie complète des fonctions élémentaires (fonctions algébriques exprimables par radicaux et fonctions transcendantes simplement périodiques, et leurs inverses), la variable étant *réelle ou imaginaire*, du théorème de Rolle, ou du lemme géométrique équivalent : « Si une courbe plane AIB, continue entre les points A, B, et dont la tangente s'infléchit d'une manière continue entre ces points, est coupée par la sécante AB, il y a un point intermédiaire I où la tangente est parallèle à AB. »

Nous développerons ultérieurement cette théorie d'une manière complète et nous donnerons alors, tout au long, les démonstrations des théorèmes des nos 4, 5, 6 esquissées plus haut(*). (P. M.)

(*) Nous avons trouvé l'idée fondamentale de cet article en décembre 1875, mais en y introduisant une erreur qui nous a été signalée obligeamment par M. Hermite. Nous avons fait connaître les points principaux de notre théorie à la Société scientifique de Bruxelles en janvier et mai 1878 (voir ses *Annales*, t. III, Première partie, p. 57), et nous les avons publiés dans le *Messenger of Mathematics*, 2d Series, t. VIII, p. 17-20 (no 86, juin 1878). Le présent article est la traduction modifiée de celui qui a paru en anglais dans le *Messenger*.

ˣGÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ DES PODAIRES(*).

Soient Mμm, Nνn deux positions d'un angle de grandeur constante dont les côtés glissent sur deux courbes C, c. Les droites Mμ, Nν, tangentes à C en M, N se coupent en T, les droites $m\mu$, $n\nu$ tangentes à c en m, n, en t. Les quatre points T, t, μ, ν sont sur une circonférence, puisque l'angle μ est égal à l'angle ν. Si l'angle Nνn se rapproche indéfiniment de l'angle Mμm, la sécante $\mu\nu$ tend à devenir la tangente au lieu du point μ. Donc la *tangente en μ, à ce lieu, est la tangente en ce point, au cercle circonscrit au triangle* Mμm, limite de Tνt.

Le cas particulier où la courbe c se réduit à un point fixe P et où l'angle constant est droit est bien connu. Dans cette hypothèse, le lieu du point μ, est appelé, comme l'on sait, la *podaire* (= lieu des *pieds* des perpendiculaires) de la courbe C, par rapport au point fixe P.

On connaît de même le cas où c se confond avec C, de manière que l'angle Mμm s'appuie, en deux points différents, M, m, sur la courbe C.

Comme application du théorème général, on peut supposer que les courbes C et c soient des circonférences. Le lieu du point μ est alors un *limaçon de Pascal* (Voir Question 2). Notre théorème permet de retrouver le mode de construction habituel de la tangente à cette courbe. (P. M.)

ˣQUESTIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

1. *Construire un triangle* ABC *qui soit semblable à un triangle donné* abc, *et dont les sommets soient situés sur trois parallèles données* X, Y, Z.

Ce problème est ordinairement résolu, soit par la considération de la circonférence circonscrite à ABC, soit par l'emploi du lieu que décrit le sommet C, lorsque, A restant fixe, B parcourt la droite Y. La solution suivante, qui est moins connue, se rattache à la *méthode des figures semblables :*

(*) Tous les articles précédés d'une croix, comme celui-ci, ne supposent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Partagez *ac*, au point *d*, en deux segments proportionnels aux distances de Y à X et Z ; les inclinaisons de *ab* et *ac* sur la droite *bd* sont égales à celles de AB et AC sur X.

2. *Construire un triangle* ABC *qui soit semblable à un triangle donné* abc, *et dont les sommets soient situés sur trois circonférences données* α, β, γ, *de même centre* O.

Les solutions de ce problème, qu'on donne habituellement, dépendent de la *méthode des figures semblables* ou de *celle des lieux géométriques*. La solution suivante repose sur une *construction auxiliaire :*

Ayant choisi arbitrairement le sommet A sur la circonférence α, supposée la plus grande, construisons le triangle AOM semblable à *abc*. Les triangles ABO, ACM seront également semblables comme ayant les angles BAO, CAM égaux et compris entre côtés proportionnels. Par conséquent

$$CM : BO = AM : AO = ac : ab.$$

Donc la distance CM est connue, et l'on pourra déterminer le point C par l'intersection de la circonférence γ et d'une circonférence décrite de M comme centre.

Cette solution ne diffère pas essentiellement de celle par les lieux géométriques.

3. *Construire un carré* ABCD *dont les côtés* AB, BC, CD, DA *passent, respectivement, par les points donnés* M, N, P, Q.

Prenons, sur la perpendiculaire abaissée de M à NQ, une longueur MR = NQ ; le point R appartiendra au côté CD, etc.

Cette solution, excessivement simple, est due à M. *Biandsutter* de Lucerne. Si on remplace le carré par un parallélogramme ABCD semblable à un parallélogramme donné *abcd*, on tracera la droite MR de manière qu'elle fasse avec NQ un angle égal à *bcd*, et on prendra MR égale à une quatrième proportionnelle à *ab*, *bc* et NQ.

4. *Soient* C, D *deux points conjugués harmoniques par rapport aux points* A, B ; M *étant le milieu de* CD, *on a*

$$\frac{MA}{MB} = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2.$$

Cette propriété de la division harmonique est souvent utile dans les applications. On en déduit, immédiatement, que les milieux des diago-

nales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite. Pour donner un autre exemple, soit à démontrer la proposition suivante :

Par deux points P, Q *de la circonférence circonscrite au triangle* ABC, *on peut faire passer six circonférences touchant l'un des côtés du triangle; les points de contact sont, trois à trois, en ligne droite.*

Désignons par α le point de rencontre des droites BC, PQ, et par α', α'' les points de contact des deux circonférences qui passent par P, Q et touchent BC; nous aurons

$$\overline{\alpha\alpha'}^2 = \overline{\alpha\alpha''}^2 = \alpha P \cdot \alpha Q = \alpha B \cdot \alpha C.$$

Par conséquent, les points α', α'' divisent BC en parties harmoniques, et, d'après la propriété énoncée ci-dessus,

$$\left(\frac{\alpha' B}{\alpha' C}\right)^2 = \left(\frac{\alpha'' B}{\alpha'' C}\right)^2 = \frac{\alpha B}{\alpha C}.$$

Les lettres β, β', β'', γ, γ' γ'' ayant des significations analogues à celles de α, α', α'', nous avons aussi

$$\left(\frac{\beta' C}{\beta' A}\right)^2 = \left(\frac{\beta'' C}{\beta'' A}\right)^2 = \frac{\beta C}{\beta A},$$

$$\left(\frac{\gamma' A}{\gamma' B}\right)^2 = \left(\frac{\gamma'' A}{\gamma'' B}\right)^2 = \frac{\gamma A}{\gamma B}.$$

Le triangle ABC, coupé par la transversale PQ, donne

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1;$$

par suite

$$\frac{\alpha' B}{\alpha' C} \cdot \frac{\beta' C}{\beta' A} \cdot \frac{\gamma' A}{\gamma' B} = \pm 1.$$

Donc les six points de contact sont, trois à trois, en ligne droite.

5. *Étant donné un polygone convexe de* n *côtés, trouver le nombre des intersections* INTÉRIEURES *des diagonales.*

Ce nombre est évidemment égal à celui des quadrilatères convexes formés avec quatre sommets du polygone donné ou égal à $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.}$ (Solution de M. *Lionnet*).

Soit encore à *trouver le nombre des points d'intersection des diagonales, tant intérieurs qu'extérieurs.* Le nombre total des diagonales est $\frac{1}{2}n(n-3)$; si l'on en retranche le nombre des diagonales qui aboutissent aux deux sommets A_i, A_k, le reste

$$\tfrac{1}{2}n(n-3)-(n-3)-(n-3)+1=\tfrac{1}{2}(n^2-7n+14)$$

exprimera le nombre des points considérés qui tombent sur la diagonale A_iA_k. Par conséquent, le nombre demandé est

$$\tfrac{1}{8}n(n-3)(n^2-7n+14)(*).$$

(*A suivre.*) (J. N.)

SUR UN NOUVEAU PRINCIPE DE CALCUL DES PROBABILITÉS.

Ce principe très-simple est le suivant « Dans une série de nombres pris au hasard, il y en a à peu près $\frac{1}{3}$ plus grands que celui qui précède et que celui qui suit, $\frac{1}{3}$ qui sont plus petits, et $\frac{1}{3}$ qui sont compris entre le précédent et le suivant. »

Ce principe, selon nous, est évident, parce qu'il est impliqué dans la notion même du hasard. Si la loi précédente ne se vérifiait pas pour une série donnée de n nombres, n étant suffisamment grand, on ne pourrait pas dire de ces nombres qu'ils sont pris au hasard.

C'est M. Bienaymé qui a énoncé le premier ce théorème (*Comptes rendus de l'Académie de Paris,* 1875, t. 81, p. 417-423).

M. Bertrand a essayé d'en donner une démonstration élémentaire (*ibid.* p. 458; 491-492). On peut vérifier la loi au moyen des tables de logarithmes, en considérant seulement les derniers chiffres des logarithmes des nombres ou des lignes trigonométriques. (P. M.)

(*) F. Englert, élève au gymnase d'Aschaffenbourg, résout la première des deux questions, dans les *Archives de Grunert, continuées par Hoppe*, t. 65, p. 446-447, de la manière suivante : En ajoutant un sommet à un polygone convexe de $(n-1)$ côtés, le nombre des points d'intersection intérieurs des diagonales augmente de

$$(n-3)+2(n-4)+3(n-5)+\cdots+(n-3)\,1=\tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3);$$

d'où, de proche en proche, la formule trouvée si aisément par M. Lionnet. (P. M.)

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'analyse de l'Université de Liége, par E. CATALAN, ancien élève de l'école polytechnique, Docteur en sciences, professeur à l'université de Liège, associé de l'Académie de Belgique, etc. Seconde édition, revue et augmentée. Algèbre. Calcul différentiel. 1re partie du Calcul intégral. Liège, Decq; Paris, Gauthier-Villars, 1879. 672 pages in-8°. — Prix : 12 francs.

Nous avons rendu compte, dans un autre recueil, de la première édition de cet excellent Cours d'analyse, publiée en 1870. Nous disions, en terminant un aperçu des matières qui y sont traitées : « Comme on le voit, cet ouvrage s'occupe de la plupart des théories les plus intéressantes tant de l'analyse algébrique que du calcul différentiel et du calcul intégral. Il est difficile de donner une idée exacte, dans un compte rendu, de ce qui en fait le mérite particulier. M. Catalan, en effet, sans négliger les principes fondamentaux de chaque théorie, élucide celles-ci, moins par des explications abstraites, que par de petites remarques détachées et par des exemples qui font peu à peu pénétrer le lecteur au fond de chaque question. Si l'on compare, sous ce rapport, son ouvrage au cours de Sturm édité par Prouhet et aux manuels classiques d'algèbre, on reconnaitra immédiatement qu'il est beaucoup plus pratique. Il y a, dans ce cours, une profusion d'applications, même numériques, et beaucoup sont traitées complètement Chaque chapitre est suivi d'un choix d'exercices bien choisis; ce sont, le plus souvent, de véritables exercices, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas de simples applications des formules démontrées : il faut quelque esprit d'invention pour en trouver la solution, et quelques-uns exigent même que l'on soit déjà habile dans l'usage du raisonnement et de l'analyse. »

Nous avons comparé minutieusement la seconde édition du Cours de M. Catalan à la première et nous ne pouvons qu'accentuer les éloges que nous donnions à celle-ci. Sans toucher à la trame de son livre et sans le modifier essentiellement, sauf sur un point (la démonstration de la formule du binôme), il l'a augmenté d'un dixième environ. De nouveaux exemples, des applications nouvelles ont été introduites dans la plupart des chapitres. Le nombre des exercices s'est aussi considérablement accru. Parmi les additions proprement dites, faites au texte de la première édition, nous signalerons un corollaire du Théorème de Descartes dû à Sturm, une méthode de décomposition des fractions rationnelles dans le cas des racines imaginaires égales, une démonstration de la formule $e^{x+yi} = e^x \times e^{yi}$, un procédé d'intégration des fractions rationnelles, encore dans le cas des racines imaginaires égales, et surtout un chapitre important sur les lignes à double courbure, extrait d'un excellent mémoire de l'auteur.

Nous recommandons donc le *Cours d'analyse de l'Université de Liège* aux professeurs et aux étudiants comme l'un des meilleurs manuels qui aient été publiés en français sur l'analyse algébrique, le calcul différentiel et le calcul intégral. (P. M.)

QUESTIONS PROPOSÉES(*).

×1. Résoudre l'équation

$$\left(\frac{a-b}{x}+\frac{b-x}{a}+\frac{x-a}{b}\right)\left(\frac{x}{a-b}+\frac{a}{b-x}+\frac{b}{x-a}\right)=9.$$

(C. H. PRIOR).

×2. *a*) Le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés sont tangents à deux circonférences données se compose de plusieurs limaçons de Pascal.

b) Pendant le mouvement de l'angle constant, un point quelconque décrit, sur le plan des deux cercles, un limaçon de Pascal; une droite quelconque est toujours tangente, à une certaine circonférence (ou, comme on dit, enveloppe une circonférence).

c) Un point quelconque du plan fixe des deux cercles trace sur le plan mobile une ellipse.

d) Si l'on considère une position quelconque de l'angle mobile, la circonférence qui passe par le sommet de cet angle et par les points de contact de ses côtés avec les circonférences données contient les pôles des limaçons de Pascal du lieu précédemment énoncé. Le lieu des centres de ces circonférences se compose de deux circonférences.

Limaçon de Pascal. Si par un point A pris sur une circonférence, on mène une sécante quelconque AD, sur laquelle, à partir du point D où elle rencontre le cercle, on porte, de part et d'autre, une longueur donnée DM ou DN, le lieu des points M et N est une courbe appelée *limaçon de Pascal.* Voir la démonstration, par la géométrie élémentaire, des propriétés de cette courbe, dans BRIOT et BOUQUET, *Géométrie analytique*, n° 30-32, 36, 38. L'énoncé de la question 2 est emprunté à MANNHEIM. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XV, p. 289.)

3. Démontrer et généraliser le théorème suivant : Les produits

$$\alpha\alpha,\ \alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \beta\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\gamma$$

des racines α, β, γ, prises deux à deux, de l'équation

$$a + bz + cz^2 + dz^3 = 0,$$

(*) Les questions précédées d'une croix peuvent être résolues par les mathématiques élémentaires.

sont les racines de l'équation en u :

$$\begin{vmatrix} u^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & u^2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Débarrasser cette équation des racines $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$. (FARKAS).

×**4.** Dans un quadrilatère, le point d'intersection M des diagonales, le point d'intersection m des droites qui joignent les milieux des côtés opposés et le centre de gravité G sont en ligne droite, et l'on a $Mm = 3mG$. (STOLL).

Pour la définition géométrique des centres de gravité des figures planes, voir ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Géométrie*, livre VI, Appendice (p. 120 et suivantes, 4me édition).

×**5.** Construire un quadrilatère connaissant les quatre côtés et la longueur de la droite qui divise deux côtés opposés dans un même rapport donné $\frac{m}{n}$. (J. NEUBERG.)

6. Si l'on convient de représenter par l'imaginaire

$$\alpha + \beta i, \qquad i = \sqrt{-1}$$

un point dont les coordonnées rectangulaires sont α, β, l'imaginaire

$$\frac{(\alpha + \beta z) + (\alpha' + \beta' z)\, i}{(\gamma + \delta z) + (\gamma' + \delta' z)\, i},$$

où z est une variable réelle, représente tous les points d'une même circonférence. (LAGUERRE.)

7. Ramener la résolution d'une équation du 4me degré à celle d'une équation réciproque.

×**8.** Soient ABC un triangle quelconque, A'B'C' un triangle inscrit à ABC, α un point pris arbitrairement sur BC. On inscrit à ABC deux lignes brisées indéfinies $\alpha\beta_1\gamma_1\alpha_1\beta_2\gamma_2\alpha_2\ldots$, $\alpha\gamma'_1\beta'_1\alpha'_1\gamma'_2\beta'_2\alpha'_2\ldots$, dont les côtés successifs sont parallèles aux côtés du triangle A'B'C', parcouru, pour la première ligne, dans le sens A'B'C' et, pour la seconde ligne,

dans le sens A'C'B'. Démontrer : 1° que les distances des points $\ldots\alpha'_2, \alpha'_1, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ au point A' sont en progression géométrique; 2° qu'en général, l'une des deux lignes brisées tend à se confondre avec A'B'C'; 3° que les deux lignes se ferment après deux tours, lorsque les droites AA', BB', CC' se coupent en un même point.

Généraliser cette proposition par voie de perspective. (J. NEUBERG.)

×**9**. Soit ABC un triangle quelconque. On prolonge le côté BC de BM = AC, CQ = AB; le côté CA de CP = AB, AS = BC; le côté AB de AR = BC, BN = AC. Cela posé : 1° les points M, N, P, Q, R, S, appartiennent à une même circonférence; 2° les droites NP, QR, SM, suffisamment prolongées, forment un triangle $\alpha\beta\gamma$ dont l'aire a pour mesure le produit du périmètre de ABC par le quadruple du rayon du cercle circonscrit; 3° les rayons des cercles circonscrits à ABC et $\alpha\beta\gamma$ sont dans le rapport 1 : 4; 4° étant donné le triangle $\alpha\beta\gamma$, en déduire le triangle ABC. (J. NEUBERG.)

Cette question peut être considérée comme la réciproque d'un théorème connu. (J. N.)

×**10**. Soient : AA', BB', CC' les hauteurs d'un triangle quelconque ABC; $(A\alpha_1, B'\beta_1, C'\gamma_1)$, $(A'\alpha_2, B\beta_2, C'\gamma_2)$, $(A'\alpha_3, B'\beta_3, C\gamma_3)$ les hauteurs des triangles AB'C', A'BC', A'B'C; H, A'', B'', C'' les points de concours des hauteurs des quatre triangles. Démontrer :

1° Que les droites A'A'', B'B'', C'C'' passent par un même point ω, qui est leur milieu commun; 2° que ω est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit à ABC au point de concours des hauteurs du triangle A'B'C'; 3° que ω est le centre d'une circonférence passant par les six points $\beta_1, \gamma_1, \gamma_2, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3$; 4° que le centre de similitude du triangle ABC et du triangle formé par les droites $\beta_1\gamma_1$, $\gamma_2\alpha_2$, $\alpha_3\beta_3$, suffisamment prolongées, coïncide avec le centre des médianes antiparallèles de ces triangles. (J. NEUBERG).

Le centre des médianes anti-parallèles d'un triangle ABC est le point de concours des droites symétriques des médianes par rapport aux bissectrices. Ce point jouit des propriétés suivantes : 1° Les distances aux côtés du triangle sont proportionnelles à ces côtés; 2° la somme des carrés de ces distances est minimum; 3° ce point est le centre de similitude du triangle ABC et du triangle qui est formé par les côtés extérieurs des carrés construits sur les côtés de ABC, etc. (J. N.)

11. Soit M un point du plan du triangle ABC, tel que les droites $\beta\alpha$, $\gamma\alpha'$, menées par ce point parallèlement à AB et AC, rencontrent le péri-

mètre de ABC en quatre points β, α, γ, α' situés sur une même circonférence. Démontrer : 1° que le lieu du point M est une droite ; 2° que le lieu du centre de la circonférence $\beta\gamma\alpha\alpha'$ est une droite ; 3° que la droite $\gamma\alpha$ enveloppe une parabole. (J. NEUBERG.)

12. Appelons *directrice* d'une chaînette, l'axe des abscisses quand cette courbe a pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Cela posé, démontrer que si cette chaînette roule extérieurement sur un cercle de rayon a, le pied de la perpendiculaire abaissée du point de contact sur la directrice décrit une spirale d'Archimède. (P. M.)

×13. Dans un triangle formé par trois arcs de loxodromie sur une sphère (ou sur une surface de révolution), la somme des trois angles est égale à deux droits. (P. M.)

La *loxodromie* est la courbe qui coupe tous les méridiens d'une sphère sous un même angle. Les trois loxodromies dont il est parlé dans la question sont supposées couper, sous des angles constants, un même système de méridiens.

×14. Construire un quadrilatère connaissant les côtés et la somme de deux angles opposés.

15. Des différents points d'une droite AB, on abaisse des perpendiculaires sur les polaires de ces points par rapport à une conique. Le lieu des pieds de ces perpendiculaires est le même que celui des points de contact des tangentes menées du pôle de AB aux coniques homofocales de la première. Dans quel cas ce lieu se réduit-il à une conique ou à une droite ? (MILLER.)

×16. Trois villes A, B, C, sont réunies par les lignes de chemins de fer AB, BC, CB. Le nombre des trains qui arrivent dans chaque ville, plus le nombre de ceux qui en partent, est proportionnel à la distance qui sépare les deux autres villes. Démontrer : 1° que le produit du nombre de trains qui circulent entre A et B, par la distance AB (ou le nombre de *trains-kilomètres* relatif à AB) est proportionnelle à $\cos^2 \frac{1}{2}$ C. 2° Pour une longueur totale $l = AB + BC + CA$ donnée, la somme des trois produits semblables relatifs à AB, BC, CA est maxima pour $AB = BC = CA$. (W. H. H. HUDSON.)

QUESTIONS D'EXAMEN, A L'USAGE DES CANDIDATS AUX ÉCOLES SPÉCIALES(*).

Arithmétique.

1. Trouver le plus petit nombre admettant 15 diviseurs? ($2^4.3^2$.)

2. Trouver le plus petit nombre admettant 12 diviseurs? ($2^2.3.5$.)

3. Trouver le nombre de deux chiffres qui admet le plus grand nombre de diviseurs? ($2^5.3$, $2^3.3^2$, $2^2.3.5$, $2.3^2.5$.)

4. Deux nombres différents sont terminés par 5; trouver la condition pour que leur produit soit terminé par 25. (Les chiffres des dizaines doivent être de même parité).

5. Deux nombres différents sont terminés par 6; trouver la condition pour que leur produit soit terminé par 36. (Les chiffres des dizaines doivent avoir pour somme 0, 5, 10 ou 15.)

6. Lorsqu'un nombre est terminé par 5, le chiffre des dizaines de son carré est 2, et celui des centaines est 0, 2 ou 6.

7. Trouver une règle qui permette d'obtenir le reste de la division d'un nombre par 12 (ou par 18)? — (Ajouter à la somme des deux derniers chiffres à droite 4 fois la somme des autres chiffres.)

8. Combien y a-t-il de fractions équivalentes à une fraction donnée et ayant des termes plus petits que ceux de cette fraction?

9. Trouver les dénominateurs des fractions irréductibles qui donnent lieu à des fractions décimales périodiques mixtes ayant deux chiffres irréguliers et un chiffre régulier? (12, 36, 75, 225, 60, 180, 150, 450, 300, 900.)

10. Les restes des cubes consécutifs, divisés par 9, se reproduisent périodiquement de 3 en 3.

11. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le quotient de deux fractions irréductibles soit un nombre entier.

(*) Sous ce titre, nous publierons un recueil de questions pouvant intéresser nos jeunes abonnés et leur donner la mesure des connaissances à acquérir. Lorsque ces questions présentent un certain degré de difficulté, nous en indiquerons la réponse ou un moyen de solution. De ces questions, les unes sont originales, les autres empruntées à divers recueils.

*SUR L'ÉVALUATION APPROCHÉE DES AIRES PLANES.

1. *Objet de la présente note.* MM. Rouché et De Comberousse ont eu l'heureuse idée d'exposer, dans leur *Géométrie* (Quatrième édition, Géométrie plane, p. 294-299), *les formules de Simpson* et *de Poncelet* pour le calcul approché de l'aire d'une figure plane limitée par une courbe quelconque. Quoique les démonstrations de ces formules, données dans cet excellent Traité, reposent uniquement sur la géométrie élémentaire, on peut encore les simplifier, en les rattachant plus étroitement aux principes sur les approximations, comme nous allons le montrer dans la présente note.

On déduit, en effet, de ces principes, de la manière la plus naturelle : la démonstration de ces deux formules; celle des formules analogues, dites *formule des trapèzes* et *formule de M. Parmentier*, dont la dernière, beaucoup trop peu connue, est presque toujours préférable à celle de Poncelet, comme l'a déclaré cet illustre géomètre; une seconde formule de Simpson, peu employée sur le continent; enfin, une série indéfinie de formules nouvelles, dont l'une, analogue à celle de Poncelet, semble avoir une valeur pratique. Ces mêmes principes nous permettent de calculer et de construire géométriquement, pour toutes ces formules, l'erreur maxima qu'elles comportent, ce qui n'a été fait jusqu'à présent, pensons-nous, que pour les formules de Poncelet et de Parmentier.

Nous trouvons aussi, dans le plus grand nombre de cas, l'erreur maxima pour une *formule des trapèzes corrigée*, très remarquable, publiée il y a bientôt trente ans par M. Catalan et dont nous n'avons pu trouver de démonstration directe.

Pour abréger, nous ne nous occupons dans le présent article, que des formules de *Simpson*, de *Poncelet*, de *M. Catalan*, *de M. Parmentier* et de la *formule des trapèzes*.

2. *Principes sur les approximations.* I. Si une quantité inconnue S est plus grande que m, plus petite que M, on peut dire que $S = m$, avec une erreur, par défaut, plus petite que $M - m$, ou que $S = M$, avec une erreur, par excès, plus petite que $M - m$.

II. Si l'on prend $S = \frac{1}{2}(M + m)$, l'erreur commise est tout au plus égale à $\frac{1}{2}(M - m)$, mais on ignore quel en est le sens.

III. Si l'on sait que S est plus rapproché de M que de m, S étant alors

supérieur à $\frac{1}{2}(M + m)$, on peut prendre pour S une valeur intermédiaire entre M et $\frac{1}{2}(M + m)$, par exemple, $\frac{1}{3}(2M + m)$. En posant $S = \frac{1}{3}(2M + m)$, l'erreur sera par excès si S est compris entre $\frac{1}{2}(M + m)$ et $\frac{1}{3}(2M + m)$, et elle sera moindre que

$$\frac{1}{3}(2M + m) - \frac{1}{2}(M + m) = \frac{1}{6}(M - m).$$

L'erreur sera par défaut si S est compris entre M et $\frac{1}{3}(2M + m)$, et elle sera moindre que

$$M - \frac{1}{3}(2M + m) = \frac{1}{3}(M - m).$$

Donc, en tout cas, si S est compris entre $\frac{1}{2}(M + m)$ et M, et si l'on pose $S = \frac{1}{3}(2M + m)$, l'erreur est moindre que $\frac{1}{3}(M - m)$.

IV. En général, si μ est une quantité comprise entre m et M, en posant $S = \mu$, on commet une erreur plus petite que la plus grande des deux quantités $\mu - m$, $M - \mu$.

3. ***Données et notations.*** Considérons une aire S, comprise entre un arc de courbe AL, une droite fixe *al* et les perpendiculaires A*a*, B*b* abaissées sur cette droite par les extrémités de l'arc AL (le lecteur est prié de faire la figure). Supposons, pour fixer les idées, que l'arc AL soit, dans toute son étendue, concave vers la droite *al*. Divisons la base *al* en un nombre pair de parties égales, en dix, par exemple. Par les points de subdivision, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, élevons des perpendiculaires à *al*. Désignons ces perpendiculaires (ou ***ordonnées***), *a*A, *b*B,..., *l*L, dont les extrémités A, B,..., L sont sur la courbe, par $y_1, y_2, \ldots, y_{11}$; soit h la distance commune de deux quelconques de ces ordonnées. Nous représenterons par E, la somme des deux ordonnées extrêmes, par I la somme des autres ordonnées de rang impair, par P, celle des ordonnées de rang pair. De cette manière

$$E = y_1 + y_{11},$$

$$I = y_3 + y_5 + y_7 + y_9,$$

$$P = y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}.$$

Nous posons ensuite :

$$d = \frac{y_2 + y_{10}}{2} - \frac{y_1 + y_{11}}{2},$$

$$d' = \frac{y_3 + y_9}{2} - \frac{y_2 + y_{10}}{2},$$

$$\delta = 2P - E - 2I.$$

4. *Première limite supérieure et première, deuxième et troisième limite inférieure de* S. I. Par les extrémités B, D, F, H, K des ordonnées de rang pair, menons à la courbe des tangentes terminées en B_1 et B_2, D_1 et D_2, F_1 et F_2, H_1 et H_2, K_1 et K_2, aux ordonnées voisines. La somme M des trapèzes

$$aB_1B_2c,\quad cD_1D_2e,\quad eF_1F_2g,\quad gH_1H_2i,\quad iK_1K_2l,$$

est supérieure à S. Ces trapèzes ont pour mesure :

$$2hy_2,\quad 2hy_4,\quad 2hy_6,\quad 2hy_8,\quad 2hy_{10}.$$

Donc

$$M = h(2y_2 + 2y_4 + 2y_6 + 2y_8 + 2y_{10}) = 2hP.$$

II. Le polygone *a*ABDFHKL*l* a une aire *m* inférieure à S, qui a pour mesure

$$m = h\left[\frac{y_1+y_3}{2} + (y_2+y_4)+(y_4+y_6)+(y_6+y_8)+(y_8+y_{10}) + \frac{y_{10}+y_{11}}{2}\right]$$

$$= h(2y_2 + 2y_4 + 2y_6 + 2y_8 + 2y_{10}) - h\left(\frac{y_2 + y_{10}}{2} - \frac{y_1 + y_{11}}{2}\right),$$

ou

$$m = 2hP - hd.$$

III. Le polygone *a*ACEGIL*l* a aussi une aire *m'* inférieure à S. On trouve sans peine

$$m' = h[(y_1 + y_3) + (y_3 + y_5) + (y_5 + y_7) + (y_7 + y_9) + (y_9 + y_{11})],$$

ou encore

$$m' = h(E + 2I)\ (*).$$

IV. Enfin le polygone *a*ABCDEFGHIKL*l* a également une aire T inférieure à S. L'aire T est donnée par la formule :

$$T = \frac{h}{2}[(y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + \cdots + (y_9 + y_{10}) + (y_{10} + y_{11})],$$

ou

$$T = \tfrac{1}{2} h(E + 2I + 2P).$$

(*) On ne conçoit pas comment Poncelet, à qui appartient la considération des aires M et *m*, n'ait pas songé à ce polygone *m'* qui va nous donner si simplement la démonstration de la formule de Simpson.

V. La figure ou les formules donnent immédiatement

$$T = \tfrac{1}{2}(M + m').$$

Donc, l'aire S étant comprise entre M et T ou $\frac{1}{2}(M + m')$, est plus rapprochée de M que de m', de sorte que l'on pourra appliquer le principe III.

VI. Il est impossible de démontrer d'une manière générale que S est aussi plus rapproché de M que de m. Néanmoins, *dans le cas de courbes à courbure peu prononcée et lorsque h est suffisamment petit*, ou reconnaître aisément, en faisant un tracé graphique, que l'on a souvent le droit, *au point de vue pratique*, de supposer S plus rapproché de M que de m.

5. *Démonstration des formules de Poncelet, de M. Parmentier, de Simpson, et de la formule des trapèzes. Erreur maxima.* I. Puisque S est compris entre M et m, on peut, d'après le principe II du n° 2, prendre $S = p$, p étant la demi-somme de M et m; l'erreur ε sera plus petite que la demi différence $\frac{1}{2}(M - m)$. On aura ainsi la *formule de Poncelet* :

$$S = p \text{ (approximativement)},$$

$$p = \tfrac{1}{2}(M + m) = 2hP - \tfrac{1}{2}hd,$$

$$\varepsilon < \tfrac{1}{2}(M - m) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}hd,$$

II. Si l'on prend $p' = \frac{1}{3}(2M + m)$, en faisant

$$S = p' \text{ (approximativement)}$$

on aura *la formule de M. Parmentier*. D'ailleurs,

$$p' = 2hP - \tfrac{1}{3}hd.$$

L'erreur maxima est égale à la plus grande des deux quantités $M - p' = \frac{1}{3}hd$ et $p' - m = \frac{2}{3}hd$, donc égale à $\frac{2}{3}hd$.

En général, d'après la remarque qui termine le n° précédent, on sera à peu près sûr que S est plus près de M que de m. On aura donc, le plus souvent, par le principe III, une erreur inférieure à $\frac{1}{3}(M - m)$, ou

$$\varepsilon < \tfrac{1}{3}hd.$$

III. Comme nous l'avons dit au n° précédent :

$$T = \tfrac{1}{2}(M + m'),$$

Donc, d'après le principe II, en posant (*formule des trapèzes*) :

$$S = T \text{ (approximativement)},$$

on commettra une erreur maxima plus petite que $\frac{1}{2}(M - m')$. Or,

$$M - m' = h(2P - E - 2I) = h\delta.$$

L'erreur maxima, *par défaut*, que comporte la formule des trapèzes est donc plus petite que $\frac{1}{2} h\delta$.

De la relation $h\delta = M - m'$, il résulte que δ *est une quantité positive* (dans les courbes concaves).

IV. Puisque S est plus près de M que de m', d'après le n° 4, V, en prenant $s = \frac{1}{3}(2M + m')$, on pourra poser

$$S = s \text{ (approximativement)},$$

ce qui est la *formule de Simpson*. On a d'ailleurs

$$s = \frac{1}{3} h(E + 2I + 4P),$$

et l'erreur que comporte cette formule est inférieure, d'après le principe III, à

$$\frac{1}{3}(M - m') = \frac{1}{3} h\delta.$$

On peut encore écrire s sous la forme :

$$s = \frac{1}{3}(M + 2T).$$

6. *Formule de M. Catalan.* Il existe un grand nombre d'autres formules de quadrature approchée, où l'on suppose les ordonnées équidistantes, comme dans les précédentes (*). La plupart peuvent se rattacher à la célèbre *formule sommatoire* de Maclaurin (souvent attribuée à Euler) et même au théorème de Taylor, comme l'a montré M. Bierens de Haan (**). On trouve beaucoup de ces formules dans le *Traité des fluxions* de Maclaurin et dans le *Calcul des différences* de Lacroix. Nous n'en citerons

(*) La formule de Gauss, dont M. Catalan a donné une démonstration si remarquablement simple (*Nouvelle correspondance mathématique*, t. VI, p. 396-402) suppose essentiellement que les ordonnées ne sont pas équidistantes.

(**) *Bulletin de l'Académie d'Amsterdam*, 2e *série* t. VI, p. 185.

qu'une, à cause de sa simplicité relative. C'est celle de M. Catalan, que l'on peut écrire :

$$S = C \text{ (approximativement)},$$

$$C = T + c, \quad c = \tfrac{1}{2} hd - \tfrac{1}{12} hd',$$

et que l'on pourrait appeler *formule des trapèzes corrigée*. Nous ne sommes pas parvenu à la démontrer directement, c'est-à-dire à enfermer C entre deux limites, l'une inférieure à C et à S, l'autre supérieure à C et à S, et ayant l'une et l'autre une interprétation géométriqne. Nous verrons ultérieurement, néanmoins, que c est positif et, par suite, que T est une limite inférieure. Chaque fois que M sera aussi supérieur à C, d'après le principe IV du n° 2, l'erreur commise en employant la formule de M. Catalan sera plus petite que la plus grande des deux différences

$$C - T = c, \quad M - C = \tfrac{1}{2} h\delta - c.$$

7. *Interprétation géométrique de d, d', δ.* La valeur de δ peut s'écrire successivement :

$$\delta = (2y_2 + 2y_4 + 2y_6 + 2y_8 + 2y_{10} - y_1 - y_{11} - 2y_3 - 2y_5 - 2y_7 - 2y_9)$$

$$= 2\left(y_6 - 2\frac{y_5+y_7}{2} + 2\frac{y_4+y_8}{2} - 2\frac{y_3+y_9}{2} + 2\frac{y_2+y_{10}}{2} - \frac{y_1+y_{11}}{2}\right)$$

$$= 2\left[\left(y_6 - \frac{y_5+y_7}{2}\right) - \left(\frac{y_5+y_7}{2} - \frac{y_4+y_8}{2}\right) + \left(\frac{y_4+y_8}{2} - \frac{y_3+y_9}{2}\right) - \left(\frac{y_3+y_9}{2} - \frac{y_2+y_{10}}{2}\right) + \left(\frac{y_2+y_{10}}{2} - \frac{y_1+y_{11}}{2}\right)\right].$$

Les quantités d, d', δ ont une interprétation géométrique simple. Appelons P, Q, R, S, T les points où les droites AL, BK, CI, DH, EG, rencontrent l'ordonnée moyenne Ff. On aura, évidemment,

$$\frac{y_1+y_{11}}{2} = Pf, \quad \frac{y_2+y_{10}}{2} = Qf, \quad \frac{y_3+y_9}{2} = Rf, \quad \frac{y_4+y_8}{2} = Sf, \quad \frac{y_5+y_7}{2} = Tf.$$

Par conséquent

$$d = Qf - Pf = PQ,$$

$$d' = Rf - Qf = QR,$$

$$\delta = 2\,[(Ff - Tf) - (Tf - Sf) + (Sf - Rf) - (Rf - Qf) + (Qf - Pf)],$$

ou

$$\delta = 2\,[FT - TS + SR - RQ + QP]. \quad (\textit{A continuer.})$$

UNE NOUVELLE FORMULE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL.

1. *Formule de Hoppe.* Il y a environ trente-cinq ans, R. Hoppe, maintenant professeur à l'université de Berlin et rédacteur du recueil mathématique connu autrefois sous le nom d'*Archives de Grunert*, trouva la formule générale qui donne la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction de fonction (*). Si l'on suppose $z = fy$, $y = \varphi x$, cette formule est la suivante, aux notations près :

$$\frac{\frac{d^n z}{dx^n}}{1.2.3\ldots n} = \sum \frac{d^p z}{dy^p} \times \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^\alpha}{1.2.3\ldots\alpha} \times \frac{\left(\frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}\right)^\beta}{1.2.3\ldots\beta} \times \frac{\left(\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}\right)^\gamma}{1.2.3\ldots\gamma} \times \cdots, \quad \text{(H)}$$

où la somme S s'étend à toutes les valeurs de p, $\alpha, \beta\, \gamma, \ldots$ telles que

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots = n, \quad \alpha + \beta + \gamma + \cdots = p.$$

Schlömilch (**), dans un mémoire spécial, puis dans son *Compendium d'analyse supérieure*, a déduit, des principes posés par Hoppe, quelques applications nouvelles et, en particulier, il a trouvé les formules générales qui permettent de changer de variable indépendante, c'est-à-dire d'exprimer $D_y^n z$ en fonction des dérivées de z et de y par rapport à x.

La formule de Hoppe a passé, sous diverses formes, dans les grands traités d'analyse avec ses principales applications. On la trouve notamment dans le *Traité* de Bertrand(***) et dans le *Cours* de Hermite(****).

Récemment, Steinbrink, sténographe de la chambre des députés de Prusse, a fait, de la théorie des dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de fonction, le sujet d'une intéressante dissertation de doctorat, à laquelle

---

(*) *Theorie der höheren Differentialquotienten.* Leipzig, 1845. Comp. Journal de Crelle, t. 33, p. 78.

(**) *Zur Theorie der höheren Differentialquotienten.* (Bulletins de la Société des Sciences de Leipzig, 1857, ou Journal de Schlömilch, t. 3, 1858). Comparer *Compendium der höheren Analysis*, 2me édition, p. 1-32 (1866).

(***) *Calcul différentiel*, nos 140-143, p. 138-143, n° 308, p. 308-309.

(****) *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique*, I, p. 59-62.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

nous avons emprunté une partie des renseignements qui précèdent (*). D'après Hoppe, qui a rendu compte de ce travail (**), le jeune savant a réellement perfectionné les travaux antérieurs en les fondant dans son propre mémoire.

2. *Formule de Teixeira.* Jusqu'à présent, personne n'avait obtenu la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction composée. Un jeune professeur de l'université de Coïmbre, M. Gomes Teixeira, auteur déjà de plusieurs mémoires remarquables sur les équations aux dérivées partielles, vient de parvenir à l'expression de cette dérivée $n^{ième}$, dans un intéressant petit article publié dans le journal de Battaglini (***).

Il commence par établir la formule (H) d'une manière nouvelle. Pour cela, il montre d'abord, ce qui est facile, que la valeur de la dérivée $n^{ième}$ est de la forme :

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \sum A \frac{d^p z}{dy^p} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\alpha} \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{\beta} \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)^{\gamma} \cdots\cdots, \qquad (h)$$

puis il détermine A, en supposant que z soit donné par la relation :

$$z = (x + x^2 + \cdots + x^n)^k$$

et cherchant, directement et par la formule (h), la valeur pour $x = 0$, de $D_x^n z$. La comparaison des deux résultats lui fournit la valeur de A et, par suite, la formule (H).

Il fait ensuite diverses applications de cette formule (H) et en déduit, en particulier, l'expression de $D_x^n(\varphi x)^m$.

Il cherche enfin la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction

$$z = f(y_1, y_2 \ldots, y_p),$$

de plusieurs fonctions de x, savoir :

$$y_1 = \varphi_1 x,\ y_2 = \varphi_2 x,\ \ldots,\ y_p = \varphi_p x.$$

(*) *Theoria derivatarum altiorum ordinum.* Berolini, typis Schadii, (1876), 49 pages in-4°.

(**) Archives de Grunert, continuées par Hoppe, t. 60: Bulletin bibliographique, p. 13-16.

(***) *Sur les dérivées d'ordre quelconque.* (Journal de Battaglini, t. 18, p. 301-307, septembre-octobre 1880).

Il trouve, par induction, la formule suivante :

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \sum A \frac{d^m z}{(dy_1)^{r_1}(dy_2)^{r_2}(dy_3)^{r_3}\cdots} \times \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)^{\beta_1}\left(\frac{d^3y_1}{dx^3}\right)^{\gamma_1}\cdot \cdots \times$$

$$\times \left(\frac{dy^2}{dx}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}\right)^{\beta_2}\left(\frac{d^3y_2}{dx^3}\right)^{\gamma_2}\cdots \times \cdots, \qquad (t)$$

où

$$m = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots, \qquad m \leqq n.$$

Pour obtenir les autres relations qui existent entre n, m, A, r_1, r_2, r_3... $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots\ldots$, il particularise la fonction z. Il suppose

$$z = (y_1 \cdot y_2 \ldots\ldots y_p)^k.$$

Il cherche la dérivée $D_x^n z$, dans ce cas, d'abord au moyen de la formule (t), puis directement, en s'aidant de la formule spéciale relative à $D_x^n (\varphi x)^m$ qu'il a donnée antérieurement comme application de (H). Comparant les deux résultats obtenus, il arrive à la valeur de A. Substituant cette valeur dans (t), il obtient ainsi la formule nouvelle :

$$\frac{\frac{d^n z}{dx^n}}{1.2\ldots n} = \sum \frac{d^m z}{(dy_1)^{r_1}(dy_2)^{r_2}(dy_3)^{r_3}\cdots} Y_1.Y_2.Y_3.... \qquad (T)$$

$$Y_k = \frac{\left(\frac{dy_k}{dx}\right)^{\alpha_k}}{1.2\ldots\alpha_k} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.2}\frac{d^2y_k}{dx^2}\right)^{\beta_k}}{1.2\ldots\beta_k} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y_k}{dx^3}\right)^{\gamma_k}}{1.2\ldots\gamma_k} \cdots$$

Dans cette formule :

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \cdots = r_1, \quad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \cdots = r_2, \ldots$$
$$\alpha_1 + 2\beta_1 + 3\gamma_1 + \cdots = h_1, \quad \alpha_2 + 2\beta_2 + 3\gamma_2 + \cdots = h_2, \ldots$$
$$h_1 + h_2 + h_3 + \cdots = n$$

Nous croyons inutile de reproduire ici les calculs un peu longs du savant portugais, parce qu'il vaut mieux que chacun se convainque par soi-même de l'exactitude de la formule nouvelle (*). (P. M.)

(*) Ajoutez aux écrits cités dans le n° 1, l'article intitulé : *Change of the Independent Variable*, by J. C. GLASHAN (Journal de Sylvester, vol. III, p. 190-191).

QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

(Suite : voir page 7-10).

6. *Par un point* O, *situé dans le plan d'un angle quelconque* CAB, *mener une transversale* MN *telle, que le triangle* MAN *soit équivalent à un carré donné* m^2.

La solution suivante nous paraît être peu connue, quoiqu'elle l'emporte en simplicité sur les autres (*).

Supposons le point O dans l'angle CAB, et soit le problème résolu. Menons OP parallèle à BA, et construisons le parallélogramme APQR équivalent au carré donné et ayant deux côtés AP, AQ, dirigés suivant AC, AB. Prolongeons MN jusqu'à sa rencontre en T avec RQ.

Le triangle OPM sera équivalent au trapèze OQRN, ou à la différence des triangles OQT et NRT ; on en conclut

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{NR}^2, \quad \overline{NR}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2.$$

Par conséquent, la distance inconnue NR s'obtient aisément par un triangle rectangle dont on connaît deux côtés.

Remarques. I. Si $OQ > OP$, le problème admet deux solutions : on peut porter $RN' = RN$, à la suite de NR sur AB, et la sécante N'OM' répond encore à la question.

II. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $OQ \geq OP$. Donc le minimum de OQ, et par suite celui de l'aire AMN, correspond à $OQ = OP$; la transversale cherchée passe par R et a son milieu en O. Ainsi *le triangle minimum formé par un angle donné* CAB *et une transversale qui tourne autour d'un point donné* O, *a pour médiane la droite* AO.

III. La solution qui précède s'applique également au cas où le point O est extérieur à l'angle CAB. On construit, dans l'angle CAB, le parallélogramme APQR valent au carré donné m^2, et l'on trouve encore $\overline{NR}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2$.

7. Beaucoup de questions peuvent se ramener au problème que nous venons de résoudre. Soit, par exemple à *partager un quadrilatère* ABCD *dans un rapport donné m* : *n par une droite* MN, *qui passe par un point donné* O.

(*) Voir, par exemple, les *Théorèmes et problèmes par E. Catalan*, 6e édition, p. 190.

Soit E, le point d'intersection des côtés BC, AD(*). Changeons le quadrilatère ABCD en un triangle équivalent ABF, et divisons BF, au point G, dans le rapport $m : n$. Le triangle EMN devra être équivalent au triangle EAG, etc.

8. *Parmi les permutations de* n *lettres* $a_1, a_2, \ldots a_n$, *combien y en a-t-il où aucune lettre n'est à sa place naturelle* (celle que lui assigne son indice)?

Soit Q_n ce nombre. Les permutations des n lettres peuvent se partager en classes, suivant que 0, 1, 2, .. p, .. n lettres occupent leurs places naturelles. Le nombre des permutations où p lettres désignées (et seulement ces lettres) ont les mêmes rangs marqués par leurs indices est évidemment Q_{n-p}. D'après cela, P_n désignant le nombre des permutations de n lettres, $C_{n,p}$ celui des combinaisons de n lettres p à p, on aura :

$$P_n = C_{n,0}\,Q_n + C_{n,1}\,Q_{n-1} + C_{n,2}\,Q_{n-2} + \cdots C_{n,p}\,Q_{n-p} + \cdots + C_{n,n}\,Q_0.$$

Dans cette formule, qui peut s'écrire symboliquement

$$P_n = (Q + 1)^n,$$

il faut supposer $C_{n,0} = 1$, $Q_1 = 0$, $Q_0 = 1$.

Faisant $n = 0, 1, 2, \ldots$, on trouve

$$P_0 = Q_0, \quad P_1 = Q_1 + Q_0, \quad P_2 = Q_2 + 2Q_1 + Q_0, \ldots,$$

d'où

$$Q_0 = P_0, \quad Q_1 = P_1 - P_0, \quad Q_2 = P_2 - 2P_1 + P_0, \quad Q_3 = P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0,$$

et, en général,

$$Q_n = P_n - C_{n,1}\,P_{n-1} + C_{n,2}\,P_{n-2} - C_{n,3}\,P_{n-3} \cdots + (-1)^n\,C_{n,n}\,P_0, \quad (1)$$

ou symboliquement

$$Q_n = (P - 1)^n.$$

La formule (1) se réduit à

$$Q_n = n(n-1)\cdots 6.5.4.3 - n(n-1)\cdots 6.5.4 + n(n-1)\cdots 6.5 - \cdots + (-1)^{n-1}\,n + (-1)^n.$$

Par exemple

$$Q_6 = 6.5.4.3 - 6.5.4 + 6.5 - 6 + 1 = 265.$$

(*A suivre.*) (J. N.)

(*) La figure suppose : AB entre E et DC, MN entre AB et CD, DF parallèle à AC.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 12.

Appelons directrice d'une chaînette, l'axe des abscisses quand cette courbe a pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Démontrer que, si cette chaînette roule extérieurement sur un cercle de rayon a, le pied de la perpendiculaire abaissée du point de contact sur la directrice décrit une spirale d'Archimède. (P. M.)

La démonstration résulte très-simplement de deux propriétés connues de la chaînette : 1° la projection de l'ordonnée de cette courbe sur la normale est constamment égale à a. 2° la distance du pied de l'ordonnée à la normale a la même longueur que l'arc compris entre le sommet de la chaînette et le point considéré.

Cela posé, soit O le centre du cercle de rayon a sur lequel roule la chaînette; A le point de la circonférence qui a été en contact avec la chaînette en son sommet, au début du mouvement; M le point actuel de contact, P le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice PQ.

La normale à la chainette en M, se confondra en direction avec le rayon MO du cercle; d'après la première propriété rappelée plus haut O sera le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur cette normale; d'après la seconde propriété, on aura PO = arc AM. Par le point O menons OX perpendiculaire à OA, de manière que l'angle XOP, que nous désignons par ω, soit égal à AOM et non à son supplément; soit aussi OP = ρ. On aura

$$\rho = \text{OP} = \text{arc AM} = a\omega,$$

Donc le lieu du point P est une spirale d'Archimède ayant O pour pôle et OX pour axe polaire.

Par un mouvement contraire de la chaînette sur la circonférence, le point P engendrerait la seconde branche de la spirale d'Archimède.

E. Clevers,
Régent à l'école moyenne de Seraing.

×Question 13.

Dans un triangle formé par trois arcs de loxodromie sur une sphère (ou sur une surface de révolution), la somme des trois angles est égale à deux droits. (P. M.)

Soit ABC un triangle curviligne *sur une surface quelconque; aAα, bBβ, cCγ* des lignes tracées sur cette surface, et telles que l'angle $aAB = AB\beta$, l'angle $\beta BC = BCc$, l'angle $cCA = CA\alpha$. On aura, successivement,

$$CAB + ABC + BCA = (CAa - aAB) + (AB\beta + \beta BC) + (cCA - BCc)$$
$$= CAa + cCA = CAa + CA\alpha = \text{deux droits.}$$

Le théorème est donc vrai aussi pour un triangle loxodromique tracé sur une sphère ou sur une surface quelconque de révolution. P. Ruex.

×Question 16.

Trois villes A, B, C, sont réunies par les lignes de chemins de fer AB, BC, CA. *Le nombre des trains qui arrivent dans chaque ville, plus le nombre de ceux qui en partent, est proportionnel à la distance qui sépare les deux autres villes. Démontrer* 1° *que le produit du nombre de trains qui circulent entre A et B, par la distance AB (ou le nombre de* trains-kilomètres *relatif à AB) est proportionnel à* $\cos^2\frac{1}{2}C$. 2° *Pour une longueur totale* $l = AB + BC + CA$ *donnée, la somme des trois produits semblables relatifs à* AB, BC, CA *est maxima pour* $AB = BC = CA$. (W. H. H. Hudson).

Représentons par x et par X le nombre de trains partant de A pour aller respectivement vers B et vers C; par y et par Y, celui des trains partant de B vers C et vers A; par z et par Z, celui des trains qui partent de C vers A et vers B. D'après l'énoncé, on aura

$$x + X + Y + z = ka, \quad y + Y + Z + x = kb,$$
$$z + Z + X + y = kc,$$

k étant une constante et a, b, c, les distances BC, AC, AB. On déduit de là :

$$y + Z = \tfrac{1}{2}k(b + c - a), \quad z + X = \tfrac{1}{2}k(c + a - b),$$
$$x + Y = \tfrac{1}{2}k(a + b - c),$$

Mais dans le triangle ABC, on a

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = a\frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4abc} = \frac{(a + b + c)}{2abk} \cdot a(y + Z), \text{ etc.;}$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Soit maintenant $a+b+c=l$. On trouve

$$S=a(y+Z)+b(z+X)+c(x+y)=\frac{2abck}{l}(\cos^2\tfrac{1}{2}A+\cos^2\tfrac{1}{2}B+\cos^2\tfrac{1}{2}C).$$

Pour que cette quantité soit maximum, il suffit que abc le soit en même temps que $\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C$. Or abc est maximum pour $a=b=c$. Le maximum de $\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C$ correspond à celui de $\cos A+\cos B+\cos C$, ou encore à celui de $\sin^2\frac{1}{2}A\sin^2\frac{1}{2}B\sin^2\frac{1}{2}C$. Ce dernier produit est maximum pour $A=B=C$ (Cambier, *Trigonométrie*, n° 81). Donc S est maximum si le triangle ABC est équilatéral.

[*Plus simplement.* On a successivement :

$$a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)=2ab+2bc+2bc-a^2-b^2-c^2=$$
$$\tfrac{1}{3}\{(a+b+c)^2-2(a-b)^2-2(b-c)^2-2(c-a)^2\}=$$
$$\tfrac{1}{3}\{l^2-2(a-b)^2-2(b-c)^2-2(c-a)^2\}$$

quantité dont le maximum correspond évidemment à $a=b=c$. (Hudson.)]

A. Van Glabbeke,
Élève du Collège communal d'Ostende.

QUESTIONS PROPOSÉES.

17. Si A, B, C sont des quantités positives, a, b, c des quantités réelles les trois racines de l'équation

$$(x-a)(x-b)(x-c)-A(x-a)-B(x-b)-C(x-c)=0$$

sont réelles. Calculer le discriminant de cette équation et le mettre sous une forme telle qu'on reconnaisse qu'il est toujours négatif.

18. Des extrémités d'un arc AD, dont la convexité est toujours tournée dans le même sens, on abaisse des perpendiculaires Aa, Dd sur une droite ad. On divise la base ad en trois parties égales ab, bc, cd et l'on mène les ordonnées bB, cC. L'aire curviligne aA Dd diffère de

$$ad\left(\frac{a\mathrm{A}+3b\mathrm{B}+3c\mathrm{C}+d\mathrm{D}}{8}\right)$$

d'une quantité plus petite que

$$ad\left(\frac{b\mathrm{B}-a\mathrm{A}+c\mathrm{C}-d\mathrm{D}}{8}\right)$$

(P. M.)

×**19.** La quantité

$$(x+y)^m - x^m - y^m - 3(x+y)(xy)^{\frac{m-1}{2}}$$

est divisible par

$$x^2 + xy + y^2,$$

si m est un multiple impair de 3. (CAUCHY.)

×**20.** Trouver, dans le plan d'un triangle ABC, un point X tel que les trois parallèles aux côtés, menées par X et limitées au périmètre de ABC, soient égales entre elles. Démontrer que l'inverse de la longueur commune de ces parallèles est égal à la demi-somme des inverses des côtés du triangle. Examiner le nombre des solutions. (J. NEUBERG.)

×**21.** A un cercle donné, circonscrire un trapèze, connaissant les deux bases.

×**22.** Si, après avoir rangé dans leur ordre de grandeur les fractions irréductibles dont le dénominateur n'excède pas un nombre entier donné, on prend à volonté dans la suite ainsi formée trois fractions consécutives,

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{A}{B},$$

on a

$$\frac{a}{b} = \frac{A+\alpha}{B+\beta}.$$

Ainsi, par exemple, si le dénominateur est inférieur à 8, on trouve les fractions suivantes plus petites que l'unité et vérifiant le théorème :

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}.$$

(J. FAREY.)

×**23.** Soient I, I′, I″, I‴, les centres des cercles inscrit et ex-inscrits au triangle ABC ; r, α, β, γ, les rayons de ces cercles, R le rayon du cercle circonscrit à ABC ; démontrer que

$$\mathrm{I'I''I'''}.r = \mathrm{II''I'''}.\alpha = \mathrm{II'I'''}.\beta = \mathrm{II''I'''}.\gamma = \mathrm{ABC.R}. \quad \text{(J. N.)}$$

×**24.** Étant donnée une pyramide régulière $SA_1A_2 \ldots A_n$, on fait tourner toutes les faces latérales d'un même angle α autour de leurs arêtes à la base. Soient $S_1A_1A_2$, $S_2A_2A_3$, ... $S_nA_nA_1$, leurs nouvelles positions. Déterminer l'angle α de manière que le volume du corps $A_1A_2 \ldots A_nS_1S_2 \ldots S_n$ soit maximum.

QUESTIONS D'EXAMEN.

Arithmétique (*).

12. Démontrer que

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)},$$

$$\left[\text{Écrire } \frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ldots;\right.$$

$$\left.\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right),\ \frac{1}{2.3.4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right),\ldots\right]$$

13. Le plus grand commun diviseur de trois nombres A, B, C est le même que celui de R, R', C, si R et R' sont les restes des divisions de A et B par C.

14. Le produit de deux nombres entiers est égale au produit de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur.

15. Démontrer que des fractions irréductibles de même dénominateur engendrent des fractions décimales limitées qui ont le même nombre de chiffres décimaux ou engendrent des fractions décimales périodiques qui ont le même nombre de chiffres irréguliers et le même nombre de chiffres périodiques.

16. Trouver deux nombres ayant pour plus grand commun diviseur 30 et pour plus petit commun multiple 2700. (Décomposer $\frac{2700}{30}$ ou 90 en deux facteurs premiers entre eux, et multiplier 30 par ces facteurs.)

17. Combien y a-t-il de nombres divisibles par B, dans la suite

A, 2A, 3A, ... BA ?

A et B sont deux nombres entiers quelconques. (Le nombre cherché est égal au *p. g. c. d.* de A et B.) (J. N.)

(*) Dans la question 7, énoncée page 16, rectifier ainsi la réponse : Ajouter au nombre formé par les deux chiffres à droite, 4 fois la somme des autres chiffres.

*SUR L'ÉVALUATION APPROCHÉE DES AIRES PLANES.

(Suite : voir page 17-22.)

8. ***Exemples.*** I. Soit à trouver l'aire de la courbe dont l'ordonnée est égale au logarithme vulgaire de x, diminué de 3, x variant de 1000 à 1006 et h étant égal à l'unité. On trouve, en dix-billionièmes (l'aire exacte S étant donnée par le calcul intégral) :

$y_1 = 0$	S = 780 17128	
$y_2 =$ 43 40774.79	$s =$ S	$\varepsilon <$ 4317
$y_3 =$ 86 77215.31	C = S − 1	$\varepsilon <$ 4318
$y_4 =$ 130 09330.20	$p' =$ S + 720	$\varepsilon <$ 7195
$y_5 =$ 173 37128.09	$p =$ S − 1080	$\varepsilon <$ 5396
$y_6 =$ 216 60617.57	T = S − 2158	$\varepsilon <$ 6476
$y_7 =$ 259 79807.20	$d =$ 10793,	$d' =$ 6476, $\delta =$ 12951.

La formule de Simpson donne un résultat exact jusqu'aux trillionièmes au moins, et même si l'on n'emploie que trois ordonnées, la différence entre S et s est moindre qu'un cent-billionième.

Pour toutes les formules, comme on le voit, les erreurs théoriques surpassent considérablement les erreurs réelles.

II. Dans l'exemple précédent, s, C, T sont calculés au moyen de sept ordonnées, p et p' au moyen de cinq seulement. En voici d'autres où les quantités s, C, p', p ont été calculées toutes également, en millionièmes, au moyen de sept ordonnées :

	Courbe I	Courbe II	Courbe III
Aire exacte	S = 693147	S = 785398	S = 1913223
Simpson	$s =$ S + 23	$s =$ S	$s =$ S − 3
Catalan	C = S + 66	C = S − 45	C = S − 10
Parmentier	$p' =$ S − 163	$p' =$ S + 124	$p' =$ S + 102
Poncelet	$p =$ S + 376	$p =$ S − 231	$p =$ S − 327

Dans la courbe I, l'ordonnée est égale à $[1 : x]$, x variant depuis 1 jusqu'à 2. Dans le courbe II, l'ordonnée est égale à $[1 : (1 + x^2)]$, x variant depuis 0 jusque 1. La courbe III est une circonférence de rayon égal à 2 ; on estime l'aire comprise entre cette circonférence, un premier rayon, un second rayon perpendiculaire au premier et une parallèle au premier par le milieu du second. On peut prouver, par la géométrie élémentaire, que les aires de ces trois courbes sont, pour I, le logarithme népérien de 2, pour II, $\frac{1}{4}\pi$, pour III, $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

9. *Comparaison des formules.* Au point de vue de la *simplicité* des calculs, les formules de Poncelet et de M. Parmentier l'emportent de beaucoup sur celles de M. Catalan et sur celle de Simpson.

Au point de vue de l'*exactitude*, d'après les exemples précédents, c'est la formule de Simpson qui vient en première ligne, celle de M. Catalan vient ensuite; puis celle de M. Parmentier et enfin celle de Poncelet. Il en est presque toujours ainsi quand on applique ces formules à des courbes *à courbure peu prononcée et coupant les ordonnées sous des angles assez voisins d'un angle droit.*

C'est l'exactitude *expérimentale* supérieure des formules de Simpson et de Parmentier, qui doit les faire préférer aux formules analogues, en nombre indéfini, que l'on peut former en posant, approximativement,

$$S = \theta M + \theta' m', \qquad S = \theta M + \theta' m, \qquad \theta + \theta' = 1.$$

C'est la possibilité de calculer, dans chaque cas, l'erreur maxima qu'elles comportent, qui les met au-dessus des formules empiriques données dans les ouvrages sur le calcul des différences.

On a essayé de comparer ces formules, d'une manière théorique, au moyen de développements en série; mais on n'est arrivé à aucun résultat vraiment pratique, parce que, jusqu'à présent, l'on n'a pas estimé les termes négligés dans ces séries, au moyen des *ordonnées de la courbe.*

On a aussi voulu établir l'exactitude supérieure de telle ou telle de ces formules, en remarquant qu'on peut l'obtenir en remplaçant la courbe par une série d'arcs de paraboles, soit du second degré, soit d'ordre supérieur. Mais personne n'a démontré, *d'une manière générale*, pensons-nous qu'il y ait avantage à remplacer une courbe quelconque, par des arcs de paraboles de n'importe quel degré, plutôt que par des droites, des cercles ou d'autres courbes. Si l'on veut faire cette démonstration par l'analyse, on retombe sur les développements en série dont nous avons parlé plus haut. Si l'on emploie, au contraire, des tracés graphiques, on reconnaît bien vite, qu'à partir du troisième degré, très-souvent les paraboles s'écartent beaucoup des courbes avec lesquelles elles ont autant de points communs que possible.

L'idée de Newton (*Principes*, Livre III, lemme V) et de Côtes de trouver l'aire de toutes les courbes en les remplaçant par des paraboles n'est donc pas établie mathématiquement, et les travaux de Gauss et de ses continuateurs sur ce sujet, n'ont trait, en réalité, qu'à la quadrature des courbes paraboliques.

10. *Historique.* Thomas Simpson(*) a publié sa formule dans ses *Mathematical Dissertations,* 1743, p. 109 (**). Au fond, il cherche l'aire des trapèzes curvilignes analogues à aABCc, en substituant à la courbe ABC une parabole passant par les trois points A, B, C et dont l'axe est perpendiculaire à al. Cette démonstration a passé dans la plupart des traités de calcul intégral. — Poncelet, dans son *Introduction à la Mécanique industrielle* (n° 180, p. 187-190 de la 2me édition, Metz, 1839 ; 3me édition, Paris, 1870, p. 194-197) en a donné une démonstration élémentaire comme il suit : Pour trouver l'aire aABCc, il divise ac en trois parties égales au, uv, vc, et mène les ordonnées de la courbe uU, vV, ainsi que les cordes AU, UV, VC, dont la seconde UV rencontre bB en W. L'aire curviligne aABCc est un peu plus grande que celle du polygone aAUVCc qui a pour mesure $\frac{1}{3}h(y_1 + 4b\mathrm{W} + y_3)$; en remplaçant $4b$W par la quantité un peu plus grande $4y_2$, ce qui revient à ajouter au polygone aAUVCc, quatre fois le petit triangle UBV, on se rapprochera *vraisemblablement* de l'aire exacte de aABCc. — MM. Rouché et de Comberousse ont simplifié cette démonstration en remarquant que si AC coupe bB en Z, l'aire du trapèze aACc est égale à $\frac{1}{3}h(y_1 + 4b\mathrm{Z} + y_3)$; remplaçant $4b$Z par $4y_2$, ce qui revient à ajouter au trapèze les $\frac{4}{5}$ du triangle ABC, on se rapprochera, vraisemblablement encore, de l'aire cherchée. — Il est clair qu'aucune de ces trois méthodes ne fournit une vraie démonstration de la formule, puisque l'erreur maxima commise n'est pas évaluée.

La formule de Poncelet, exposée par lui dans son Cours de la faculté des sciences de Paris, n'a pas été publiée par son auteur, mais elle s'est rapidement répandue. D'après M. de Saint-Venant, dès 1851, elle se trouvait déjà dans le *Traité élémentaire de Mécanique* de M. Sonnet. On la trouve maintenant dans la troisième édition de la *Mécanique industrielle*, publiée par M. Kretz, p. 197-201.

(*) Né en 1710, mort en 1761 ; ne pas le confondre avec son contemporain, Robert Simson, né en 1687, mort en 1761 aussi.

(**) Nous empruntons ce renseignement à une note de la page 67, de la célèbre édition de la *Résistance des Corps solides* de Navier, donnée par M. B. de Saint-Venant, Paris, Dunod, 1864. T. Simpson, dans son ouvrage intitulé : *The Doctrine and Application of Fluxions*, London, 1750, p. 202, fait allusion à sa formule, mais ne la donne pas. Probablement, les *Dissertations* de Simpson contiennent aussi sa seconde formule.

La formule de M. Parmentier, a été trouvée, en 1854, par ce savant officier (alors capitaine, maintenant général), et publiée, dans le n° 16 du *Mémorial de l'officier du Génie* vers le milieu de cette année, puis dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XIV (1855), p. 370-384. La démonstration, au fond, ne diffère pas de celle qui a été donnée plus haut. Le général Piobert arrivait quelques mois après à la même formule, par une voie moins nette, dans un article publié en septembre 1854, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XIII, p. 323-331. M. le général Parmentier est revenu sur sa formule, en 1876, dans un article intéressant, inséré dans le tome XV, 2me série, pages 241-251, du même recueil, où il donne, comme nous l'avons fait plus haut, l'estimation de l'erreur maxima qu'elle comporte. Il remarque de plus qu'on arrive à cette formule en retranchant de $2s$ l'aire des trapèzes ABba, KLlk, puis l'aire curviligne bBKkb, calculée par la formule de Simpson. Cette nouvelle démonstration de la formule de Parmentier fait saisir, sous un nouveau point de vue, la raison de son exactitude supérieure à celle de la formule de Poncelet.

M. Catalan a publié sa formule en 1851 (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. X, p. 412-415). Il l'obtient en regardant l'aire curviligne aABb, comme celle d'une parabole à axe parallèle à Aa, et passant par A, B, C, l'aire curviligne bBCc, comme celle d'une parabole analogue passant par B, C, D; et ainsi de suite jusque l'aire iIKLl qu'il calcule comme Simpson. Il refait ensuite des calculs analogues en sens inverse, en partant de L et marchant vers A, de sorte que l'aire lLKk est maintenant regardée comme celle d'une parabole passant par L, K, I et ayant un axe parallèle à Aa, kKIi, l'aire d'une parabole analogue passant par K, I, L; enfin l'aire cCBAa est calculée comme chez Simpson. La moyenne des deux résultats obtenus donne la *formule des trapèzes corrigée*.

Il serait bien intéressant de donner de la formule de M. Catalan une démonstration qui permît d'assigner l'erreur maxima qu'elle comporte, sans passer par la considération de la formule des trapèzes. (P. M).

SUR LA SÉRIE $\frac{1}{(\log 2)^n} + \frac{1}{(\log 3)^n} + \cdots + \frac{1}{(\log x)^n} + \text{etc.}$

(Extrait d'une lettre de M. HERMITE.)

Je me propose de faire voir que, pour toutes les valeurs de l'exposant n, cette série est divergente, bien que les termes paraissent décroître avec une grande rapidité, lorsque x augmente. Pour cela, je ferai usage de la règle de Raabe(*) dont je rappelle d'abord l'énoncé : La série $u_1 + u_2 + \cdots + u_x + \cdots$, dont les termes sont supposés positifs, est divergente si, en posant :

$$\frac{u_{x+1}}{u_x} = \frac{1}{1+\alpha},$$

la limite de $x\alpha$, pour x infini, est moindre que l'unité.

Nous avons, dans l'exemple proposé,

$$1 + \alpha = \frac{u_x}{u_{x+1}} = \left[\frac{\log(x+1)}{\log x}\right]^n.$$

Or, on peut faire, au moyen de la série de Maclaurin,

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\theta}{x},$$

θ désignant un nombre plus petit que l'unité, pour toute valeur de x, et écrire, par suite :

$$\left[\frac{\log(x+1)}{\log x}\right]^n = \left[1 + \frac{\theta}{x \log x}\right]^n.$$

Nous obtenons donc, en développant la puissance :

$$\alpha = \frac{n\theta}{x \log x} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{\theta}{x \log x}\right)^2 + \cdots;$$

d'où :

$$x\alpha = \frac{n\theta}{\log x} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\theta^2}{x \log^2 x} + \cdots$$

On voit ainsi que la limite du produit $x\alpha$ est zéro, pour x infini, ce qui démontre le résultat annoncé.

(*) Voir DUHAMEL, *Calcul infinitésimal*, Note III, n° 35 (P. M.).

DISCUSSION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

Les racines des l'équation cubique :

$$x^3 + ax + b = 0,$$

sont données, comme l'on sait, par les formules(*) :

$$x_1 = A + B,$$

$$x_2 = -\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{-3}, \quad x_3 = -\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\sqrt{-3},$$

où l'on suppose

$$A = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}; \qquad B = -\frac{a}{3A}.$$

Supposons a, b réels. Dans ce cas, l'équation $x^3 + ax + b = 0$, a une racine réelle, comme toutes les équations de degré impair à coefficients réels. Soit p cette racine réelle; divisons $x^3 + ax + b$ par $x - p$ et représentons le quotient par $x^2 + px + q$, c'est-à-dire posons

$$x^3 + ax + b = (x - p)(x^2 + px + q)$$

ce qui entraine

$$a = q - p^2, \qquad b = -pq.$$

Soient maintenant

$$\Delta = 27b^2 + 4a^3, \qquad \delta = -p^2 + 4q.$$

On aura

$$a = \delta - 3q, \qquad b^2 = q^2(4q - \delta).$$

Par suite, en exprimant Δ au moyen de q et δ,

$$\Delta = 27q^2(4q - \delta) + 4(\delta - 3q)^3 = 108q^3 - 27\delta q^2 + 4\delta^3 - 36\delta^2 q + \\ + 108\delta q^2 - 108q^3 = \delta(4\delta^2 - 36\delta q + 81q^2),$$

ou enfin

$$\Delta = \delta(2\delta - 9q)^2.$$

(*) On trouve sans peine que l'on a identiquement $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + ax + b$. L'équation donnée est donc bien vérifiée par les racines $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$.

Il résulte de cette relation fondamentale que Δ et δ sont toujours de même signe. Donc 1° si Δ est positif, δ est positif aussi, et les deux racines de l'équation cubique données par $x^2 + px + q = 0$, c'est-à-dire :

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-\delta}, \quad x_3 = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-\delta}$$

sont imaginaires, et réciproqnement.

2° Si Δ est négatif et, par suite, A imaginaire, δ est négatif aussi, et x_2, x_3 sont réelles comme x_1 ; et réciproquement.

3° Enfin, si $\Delta = 0$, trois cas peuvent se présenter : ou bien $\delta = 0$, ou bien $2\delta - 9q = 0$, ou bien ces deux circonstances se présentent à la fois. Dans cette dernière hypothèse, $\delta = 0$, $q = 0$ entrainent $a = 0$, $b = 0$, et l'équation donnée se réduit à $x^3 = 0$. Si $\delta = 0$, sans que $q = 0$, l'on a $x_2 = x_3 = -\frac{1}{2}p$. Enfin, si $2\delta - 9q = 0$, on a

$$2(4q - p^2) = 9q \quad \text{ou} \quad q = -2p^2.$$

Par suite, l'équation $x^2 + px + q = 0$ devient $x^2 + px - 2p^2 = 0$, et a pour racines :

$$x_2 = p, \quad x_3 = -2p.$$

Par conséquent, si $\Delta = 0$, l'équation donnée a toujours des racines égales. (D'après E. Liebrecht, *Archives de Grunert*, continuées par Hoppe, t. 59, p. 216.) (P. M.)

BIOGRAPHIE ET BIBLIOGRAPHIE.

Albert Namur.

1. *Notice biographique.* — Albert Namur, auteur d'une méthode remarquable pour le calcul des logarithmes de Briggs, naquit à Thuin-sur-Sambre, le 8 avril 1817. Il fit des études d'humanités complètes au collège de sa ville natale; puis, après une année passée dans les bureaux du receveur de l'enregistrement de Thuin, il devint teneur de livres dans une grande maison de commerce de Bruxelles. Rentré à Thuin après 15 ou 20 ans d'absence, il fut nommé secrétaire-trésorier de l'école moyenne et receveur des hospices de cette ville. Dès 1857, A. Namur était en possession de la *méthode du module* pour le calcul des logarithmes de Briggs; il la communiqua à diverses personnes et la présenta même à l'Institut de France, comme le prouve une note insérée dans les *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences* du 14 septembre 1857 (Tome XLV, p. 377; comp. t. XLVI, p 815). Mais ce fut vingt ans plus tard seulement, qu'il put publier les tables

fondées sur cette méthode, grâce au patronage éclairé de l'Académie(*). Ce petit ouvrage fit connaître le rare talent de calculateur de Namur; peu après sa publication, il entra à l'Institut cartographique militaire et y fut chargé de calculs géodésiques. Il s'attacha avec ardeur à ses nouvelles fonctions et s'en acquitta consciencieusement jusqu'à sa mort, arrivée le 23 juin 1880. C'est lui qui exécuta une grande partie des calculs numériques de la compensation du réseau belge. Il savait s'y ménager d'ingénieuses vérifications; aussi n'a-t-on jamais relevé qu'une seule erreur, d'ailleurs de peu d'importance, dans ces immenses combinaisons de chiffres.

Avant la publication des tables de Namur, la Belgique venait après la Chine et la Turquie sous le rapport du nombre des publications logarithmiques. Namur a relevé l'honneur de son pays en publiant son précieux recueil, basé sur une méthode nouvelle, la *méthode du module*, la plus originale, la seule originale peut-être qui ait paru depuis Neper et Briggs. Il avait commencé et il laisse en manuscrit diverses autres tables inachevées, savoir : des tables de multiplications disposées d'une manière très-ingénieuse, des tables d'intérêts composés et d'annuités à 12 décimales, enfin des tables de logarithmes à 36 décimales. Un ami de Namur, qui semble avoir la même aptitude que lui pour les calculs numériques, publiera prochainement ces dernières tables qu'il a bien voulu calculer par la méthode de Namur.

2. *La méthode du module.* — Dans une table de logarithmes vulgaires à 5 décimales, les différences logarithmiques sont toutes égales à 10, pour les nombres un peu inférieurs à 4343, ou 10000 fois le module. Dans une table de logarithmes à 7 décimales, les différences logarithmiques sont toutes égales à 100 pour les nombres un peu inférieurs à 43429 ou 100000 fois le module. On peut s'assurer de l'exactitude de cette remarque, en examinant l'extrait suivant d'une table à 7 décimales :

Nombres :	43420,	21,	22,	23,	24,	25,	26, etc.
Logarithmes :	4.6376898,	6998,	7098,	7198,	7298,	7398,	7498, etc.
Différences :		100,	100,	100,	100,	100,	100.

Cette remarque constitue un théorème général pour n'importe quel système de logarithmes et on peut l'établir d'une manière élémentaire, comme nous l'avons prouvé dans l'*Introduction* aux tables de Namur. C'est cet ingénieux calculateur qui l'a signalée le premier; il en a conclu qu'il fallait effectuer de préférence

---

(*) *Tables de logarithmes, à douze décimales, jusqu'à 434 milliards, avec preuves*, par A. NAMUR, etc., précédées d'une notice sur l'usage des tables par P. MANSION, publiées par l'académie royale de Belgique. Bruxelles, Hayez; Paris, Gauthier-Villars; 1877; XVI-11 pages, grand in-8°. Prix : Un franc. Les mêmes tables, précédées d'une introduction théorique, par M. P. MANSION, 26-XIV-11 pages in-8°. Prix : 3 francs. En vente chez Ad. Hoste, à Gand.

l'interpolation logarithmique aux environs du module. L'interpolation logarithmique est, en effet, extrêmement facile aux environs du nombre 43429. Soit par exemple, à trouver le logarithme de 434237 à 7 décimales. On écrira :

$$\begin{array}{rl} \text{Log } 434230 = 5.6377198 & \text{Différence } 100 \\ 7 = \quad 70 & \times \quad 0.7 \\ \text{Log } 434237 = 5.6377268 & \quad 70 \end{array}$$

Comme tout nombre peut être ramené, par des facteurs convenables, aux environs de 43129, on conçoit que l'on puisse rendre très-simple le calcul du logarithme d'un nombre quelconque, au moyen de tables contenant ceux de ces facteurs et des nombres voisins du module. C'est ce que Namur a réalisé, dans ses tables, de la manière la plus pratique, tant pour la recherche des logarithmes que pour celle des nombres.

8. *Les tables manuscrites de Namur à* 36 *décimales.* — L'interpolation simple, au moyen de la proportion logarithmique, ne peut servir à trouver les logarithmes à un très-grand nombre de décimales. Il en résulte que la *méthode du module* semble impuissante, au premier abord, à donner des résultats aussi étendus que la *méthode des facteurs voisins de l'unité* employée par Thoman, Gray et Hoppe, dans leurs tables à 27, 24 et 33 décimales. Namur reconnut bientôt que l'interpolation, par un procédé moins élémentaire que la proportion logarithmique, permet à la méthode du module de donner, plus simplement et plus sûrement qu'aucune autre, les logarithmes avec tel nombre de figures que l'on veut. Voici le principe de cette interpolation nouvelle, aux environs du module :

Par des facteurs convenables, on peut amener un nombre quelconque à différer du module M d'une quantité dont le cube soit assez petit pour ne pas influer sur les décimales que l'on veut conserver dans les calculs. Cela posé, on a, pour tout nombre N, tel que $(N - M)^3$ soit ainsi négligeable :

$$\text{Log } N = \Delta + N - \frac{(N - M)^2}{2M},$$

Δ étant une constante, la même pour tous les nombres. Le calcul de Log N est ainsi ramené à celui de $[(N - M)^2 : 2M]$, et celui-ci, à cause de la petitesse de $N - M$, peut se faire au moyen d'une table ordinaire de logarithmes.

Comme on le voit par cette rapide esquisse des travaux du modeste calculateur de Thuin, Namur n'avait pas seulement des facultés numériques supérieures, qui lui permirent de se mouvoir à l'aise au milieu des immenses calculs de la triangulation belge : il avait aussi cette pleine possession des théories de l'arithmétique logarithmique qui lui a fait découvrir et utiliser complétement la *méthode du module.* Il faut espérer que son nom restera attaché à cette méthode à laquelle n'ont pensé ni Neper, ni Briggs, ni aucun des auteurs plus modernes qui se sont occupés du calcul des logarithmes à un grand nombre de décimales. (P. M.)

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1.

Résoudre l'équation

$$\left(\frac{a-b}{x}+\frac{b-x}{a}+\frac{x-a}{b}\right)\left(\frac{x}{a-b}+\frac{a}{b-x}+\frac{b}{x-a}\right)=9.$$

(C. H. Prior.)

Effectuons les opérations indiquées dans le premier membre. Il viendra :

$$\frac{[ab(a-b)+bx(b-x)+ax(x-a)][x(b-x)(x-a)+a(a-b)(x-a)+b(a-b)(b-x)]}{abx(a-b)(b-x)(x-a)}=9.$$

Le premier facteur du numérateur du premier membre s'annule pour $a=b$, $b=x$, $x=a$. Il est donc divisible par $(a-b)(b-x)(x-a)$; le quotient est -1. L'équation devient donc :

$$-\frac{x(b-x)(x-a)+a(a-b)(x-a)+b(a-b)(b-x)}{abx}=9.$$

Faisons disparaître le dénominateur, ce qui est permis, car ni $x=0$, ni $x=\infty$ ne sont racines, comme il est aisé de le voir, et ordonnons. On trouve :

$$x^3-(a+b)x^2-(a^2+b^2+6ab)x+a^3-a^2b-ab^2+b^3=0.$$

Après quelques tâtonnements, on met cette équation sous la forme :

$$(x+a+b)[x^2-2(a+b)x+(a-b)^2]=0,$$

ce qui donne

$$x_1=-a-b, \qquad x_2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2, \qquad x_3=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

E. Verhelst,
Professeur à l'Athénée de Bruxelles(*).

M. le capitaine H. Brocard(**) qui nous a envoyé une excellente solution de la question 1, identique, pour le fond, à la précédente, nous fait remarquer que M. J. W. L. Glaisher a déduit beaucoup de rela-

(*) M. Verhelst nous a aussi envoyé une excellente solution de la question 16, un peu plus simple que celle qui a été insérée p. 29-30.

(**) M. Brocard nous a aussi fait parvenir une solution de la question 12, sur laquelle nous reviendrons ultérieurement, dans une note où nous réunirons les remarques de tous nos collaborateurs relatives aux articles de la *Mathesis*.

tions curieuses de l'équation de M. Prior (*Messenger of Mathematics*, août 1880). En mettant c à la place de x, on peut énoncer les résultats obtenus plus haut comme il suit : Si $a+b+c=0$, on a :

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9,$$

ou, puisque $c=-(a+b)$, $a=-(b+c)$, $b=-(c+a)$,

$$\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right)=9.$$

On a encore, à cause des mêmes relations,

$$\frac{a-b}{c}=\frac{(a-b)(a+b)}{c(a+b)}=-\frac{a^2-b^2}{c^2}, \quad \text{etc.}$$

Donc, si $a+b+c=0$,

$$\left(\frac{a^2-b^2}{c^2}+\frac{b^2-c^2}{a^2}+\frac{c^2-a^2}{b^2}\right)\left(\frac{c^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2}{b^2-c^2}+\frac{b^2}{c^2-a^2}\right)=9,$$

résultat qui se déduit aisément, au reste, de la valeur des racines x_2, x_3 données ci-dessus.

Si l'on suppose que a, b, c soient les côtés d'un triangle ABC, de sorte que l'on n'ait plus $a+b+c=0$, on trouve, en généralisant la formule de M. Prior :

$$\left[\frac{\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{\sin(A-B)}{\sin C}\right]$$
$$\times\left[\frac{\sin A}{\sin(B-C)}+\frac{\sin B}{\sin(C-A)}+\frac{\sin C}{\sin(A-B)}\right]$$
$$=9-4(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$$

et beaucoup d'autres relations du même genre.

×Question 2.

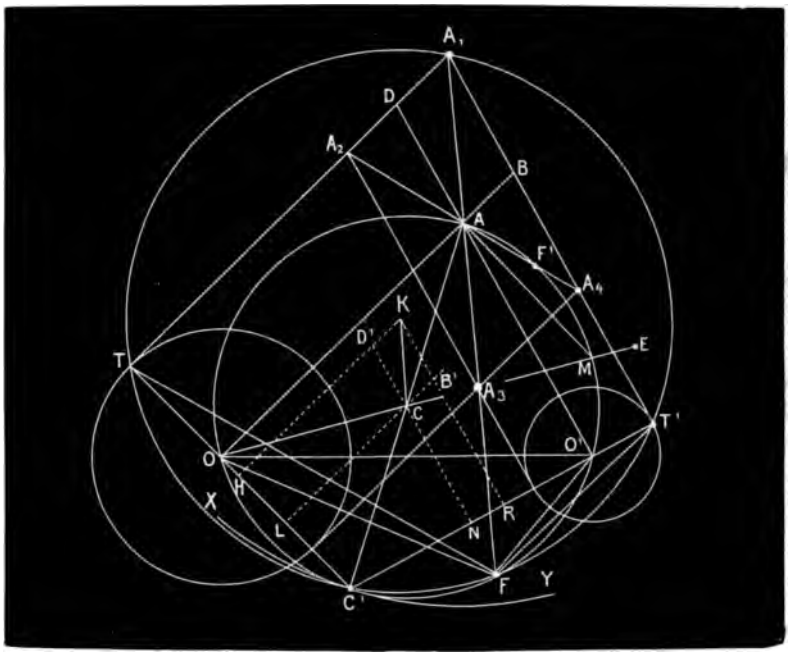
A) *Le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés sont tangents à deux circonférences données se compose de plusieurs limaçons de Pascal.*

B) *Pendant le mouvement de l'angle constant, un point quelconque décrit, sur le plan des deux cercles, un limaçon de Pascal; une droite quelconque est toujours tangente à une certaine circonférence* (*ou, comme on dit, enveloppe une circonférence*).

C) *Un point quelconque du plan fixe des deux cercles trace sur le plan mobile une ellipse.*

D) *Si l'on considère une position quelconque de l'angle mobile, la circonférence qui passe par le sommet de cet angle et par les points de contact de ses côtés avec les circonférences données contient les pôles des limaçons de Pascal du lieu précédemment énoncé. Le lieu des centres de ces circonférences se compose de deux circonférences* (*).

I. Soient P le plan des 2 circonférences O, O'; P' celui de l'angle mobile TA$_1$T'. Menons par O et O' des parallèles OA, O'A aux côtés de



l'angle mobile. Le mouvement proposé se réduit à celui de l'angle constant OAO', dont les côtés sont assujettis à passer par deux points

(*) *Limaçon de Pascal.* Si par un point F pris sur une circonférence OAO', on mène une sécante quelconque FA, sur laquelle, à partir du point A où elle rencontre le cercle, on porte, de part et d'autre, une longueur donnée AA_1 ou AA_3, le lieu des points A_1 et A_3 est une courbe appelée *limaçon de Pascal.* Voir la démonstration, par la géométrie élémentaire, des propriétés de cette courbe, dans Briot et Bouquet, *Géométrie analytique*, n^{os} 30-32, 36, 38. L'énoncé de la question 2 est emprunté à Mannheim (*Nouvelles Annales Mathématiques*, t. XV, p. 289).

fixes O, O'. Il est clair que, pendant ce mouvement, le sommet A trace, sur le plan P, la circonférence C circonscrite à OAO'.

Toute droite de P', telle que A_1AF, menée par le sommet de l'angle mobile, passe, dans toutes les positions de P', par un même point F du plan fixe situé sur la circonférence OAO'; car l'angle OAF étant constant, l'arc OF est invariable. Remarquons, en passant, que le mouvement d'un angle quelconque OAO' n'est pas ici plus général que celui d'un angle droit, OAM, par exemple, assujetti aux mêmes conditions. Une droite quelconque D du plan P' est parallèle à une droite AM passant par A; celle-ci a toujours un de ses points en M; donc, à cause du parallélisme, la droite D restant à la même distance de M, enveloppe une circonférence dont le centre est en M. Des droites parallèles entre elles enveloppent des circonférences concentriques. Tout point A_1 du plan mobile appartient à une droite AF passant par A. Celui-ci glisse sur la circonférence C, tandis que AF pivote autour de F. La distance AA_1 étant invariable, A_1 décrit un limaçon de Pascal, suivant la définition même de cette courbe.

II. Le mouvement du plan mobile P' serait le même, s'il était entraîné par une droite OA assujettie à pivoter sur un point O du plan P, pendant qu'un de ses points décrit une circonférence. Le même mouvement peut encore être engendré d'une autre manière. Le centre instantané de rotation se trouve sur le diamètre AC, puisque le point A décrit la circonférence C; la droite OA enveloppant le point O, cercle de rayon nul, le centre instantané se trouve aussi sur la perpendiculaire à OA élevée en O, donc en C', extrémité du diamètre AC(*). Sur le plan P', le point C' décrit la circonférence qui a pour centre le point A et pour rayon le diamètre du cercle OAO'. On pourrait donc produire le mouvement du plan P' en faisant rouler une circonférence XC'Y de ce plan, sur un circonférence fixe C de rayon moitié moindre.

III. Pour obtenir les courbes tracées par le plan P sur P', on peut supposer que le cercle C roule dans la circonférence XC'Y rendue fixe. Un point quelconque F de la circonférence C décrit ainsi visiblement le

---

(*) Il n'est évidemment pas nécessaire de recourir ici à la notion du centre instantané de rotation. (P. M.)

diamètre FA. Je dis qu'un autre point E, décrit une ellipse. Menons par E le diamètre EC du cercle C. Pendant le mouvement, les extrémités O et M de ce diamètre glissent sur les deux droites rectangulaires AM et AO. En vertu d'un théorème connu, ce mouvement d'une droite fait décrire des ellipses à chacun de ses points(*).

IV. Les parties *b*) et *c*) de la question proposée viennent d'être démontrées. Le sommet de l'angle mobile peut occuper de chaque côté de OO' quatre positions A_1, A_2, A_3 et A_4. Il y aurait ainsi huit limaçons tracés sur le plan fixe ; mais on remarque que les positions A_1 et A_3, A_2 et A_4 donnent lieu à des courbes qui ont même pôle F ou F' et qui se complètent ou se confondent. Toutes les positions ne fournissent donc que 4 limaçons dont les pôles sont respectivement F, F' et les symétriques de ces points par rapport à la ligne des centres OO'.

Prouvons maintenant que le cercle K passant par les points de contact T et T', et par le sommet A_1, contient le pôle F du limaçon décrit par A_1. Le point C' diamétralement opposé à A dans le cercle C appartient à cette circonférence ; car les rayons OT et O'T' se coupent au point C' et le quadrilatère $A_1TT'C'$ est inscriptible. Pour que le pôle F se trouve sur la circonférence K, il faut que l'angle C'TF soit égal à C'T'F, ou que les triangles O'T'F et OTF soient semblables, puisque déjà les angles TOF et FO'T sont égaux comme suppléments des angles égaux C'OF, C'O'F. Or les triangles équiangles OFO' et A_1AB donnent $OF : O'F = A_1B : AB = OT : O'T'$, les hauteurs correspondant à A_1B et à BA, dans le triangle A_1BA, étant égales à O'T' et OT.

V. Pour trouver le centre K, on peut élever, sur les milieux H et R de TC' et de T'C', les perpendiculaires HK et RK. Le centre fixe C se trouve de même à l'intersection des perpendiculaires LC et NC élevées aux milieux de OC' et de O'C'. Ces quatre perpendiculaires forment le parallélogramme KB'CD' ayant tous ses côtés parallèles à ceux de A_1BAD et réduits de moitié, puisque $HL = \frac{1}{2}OT$, $NR = \frac{1}{2}T'O'$. La droite CK, qui joint les deux centres, est donc constante en longueur et est égale à $\frac{1}{2}AA_1$; on en conclut que le centre K décrit une circonfé-

(*) Démonstration élémentaire de ce théorème, dans ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Géométrie* (Quatrième édition, *Géométrie dans l'espace*, livre VIII, § IV, p. 335). (P. M.)

rence concentrique à la circonférence OAO'(*). Le deuxième cercle, lieu des centres des circonférences analogues à $A_1TC'T'$ et symétriques par rapport à OO', a même rayon que le lieu du point K, et son centre est le symétrique de C par rapport à OO'(**). E. CLEVERS.

×Question 5.

Construire un quadrilatère ABCD, *connaissant les quatre côtés et la droite* MN *qui divise les côtés* AB, DC *dans un même rapport donné* m : n. (J. N.)

Solution par M. E. VERHELST (Le lecteur est prié de faire la figure). I. Soit P le point qui divise la diagonale DB dans le rapport $m : n$. On peut construire le triangle MPN dont on connaît les côtés MN, $MP = \frac{n}{m+n}AD$, $NP = \frac{m}{m+n}BC$. Si l'on prend, sur MP, une longueur $MR = AD$, on aura $DR = AM$; par suite, les trois côtés du triangle NRD sont connus, et il sera facile d'achever la figure.

Solution par M. PRÉVOST, *élève à l'Athénée de Liége*(***). Supposons construits les parallélogrammes BADE, BMNF; les points C, E, F seront en ligne droite. La question est ramenée à construire le triangle CBE dans lequel on connaît deux côtés BC, BE, et la droite BF qui divise le troisième côté dans le rapport donné $m : n$.

(*) La ligne CK, parallèle à AA_1, étant égale à la moitié de AA_1, et CC' étant aussi égale à la moitié de AC', les triangles KCC', A_1AC' sont semblables. Par conséquent A_1, K, C' sont en ligne droite. La normale A_1K au cercle K et la normale AC au cercle C passent donc par le point C', diamétralement opposé à A. Mais, d'après l'article sur la *Généralisation d'une propriété des podaires* (Mathesis, p. 7), la normale A_1K au cercle K est aussi la normale au limaçon engendré par le point A_1. On retrouve donc ainsi le théorème connu sur la normale au limaçon. (P. M.)

(**) Nous avons reçu, trop tard pour pouvoir l'insérer, de M. S. B., professeur au lycée de Reims, une solution, identique au fond à celle de M. Clevers, mais pourtant, çà et là, un peu plus simple ou plus explicite. M. S. B. remarque, par exemple, que les divers limaçons sont tangents aux cercles O, O', ce qu'il est aisé de déduire de la note précédente.

(***) M. Prévost nous a aussi envoyé une bonne solution de la question 16.

QUESTIONS PROPOSÉES(*).

×**25**. Toute puissance entière de 3 est la somme de trois carrés premiers avec 3. (E. CATALAN.)

26. Intégrer l'équation différentielle

$$48x(1-x)y'' + (32-56x)y' + y = 0 \quad \text{(SCHWARZ.)}$$

×**27**. Démontrer que la série

$$\frac{1.2}{3.4.5.6} + \frac{2.3}{4.5.6.7} + \frac{3.4}{5.6.7.8} + \cdots$$

est convergente et a pour somme $\frac{1}{9}$. (J. N.)

28. On donne une parabole (P) et une de ses tangentes t, dont le point de contact est A. Par les différents points de t, on élève des perpendiculaires aux tangentes à (P) menées par ces points, autres que t. Ces tangentes enveloppent une seconde parabole (P'). Le parabole (P') est tangente à t en un point B. Les paraboles (P) et (P') ont le même foyer, leurs axes sont rectangulaires. La directrice de (P) passe par le point B, la directrice de (P') passe par le point A. (ED. DEWULF.)

29. Une droite mobile ab enveloppe une courbe E, la longueur de cette droite est définie par deux courbes sur lesquelles doivent se trouver ses extrémités a et b. Ainsi, le point a reste sur la courbe (a), le point b sur la courbe (b). Un point m de cette droite partage le segment variable ab en deux segments proportionnels à deux segments donnés.

Les normales aux trajectoires (m) des différents points de ab enveloppent une parabole (P) inscrite dans le quadrilatère formé par la droite ab, les normales en a à (a), en b à (b) et la normale à E au point où cette courbe est touchée par ab. Les tangentes aux mêmes trajectoires enveloppent une parabole (P'). Les paraboles (P) et (P') ont le même foyer, leurs axes sont rectangulaires, etc. (ED. DEWULF.)(**)

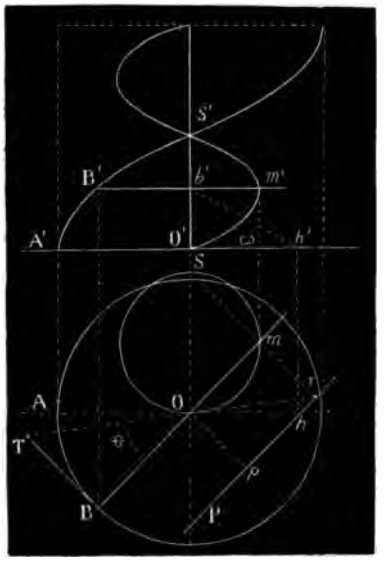
(*) Dans l'énoncé de la question 17, lire *discriminant*, au lieu de *descriminant*; dans celui de la question 23, lire ABC. 2R, au lieu de ABC. R.

(**) M. le Lt Colonel du Génie E. Dewulf, en nous communiquant ces énoncés, ajoute que ces propositions ne sont peut-être pas nouvelles, mais qu'elles peuvent avoir quelque intérêt, parce qu'elles forment un commentaire à un passage de la *Géométrie descriptive* de M. Mannheim, pp. 173-174.

COURBE DE CONTACT D'UN CYLINDRE CIRCONSCRIT A UN HÉLICOIDE A PLAN DIRECTEUR,

par M. VERSTRAETEN, professeur à l'Université de Gand.

Cette courbe, qui est aussi l'ombre propre de l'hélicoïde, dans l'hypothèse du parallélisme des rayons lumineux, est une hélice tracée sur un cylindre droit, à base circulaire, dont l'axe de l'hélicoïde est une génératrice. Le pas de cette hélice est la moitié de celui de l'hélice directrice de la surface, et l'inclinaison des tangentes par rapport au plan horizontal est celle de la direction des rayons lumineux (*).



Soient, en effet, (AB, A'B') l'hélice directrice tracée sur le cylindre vertical ayant pour base la circonférence O, de rayon R, et pour axe, la verticale (O, O'b'); (BO, B'b') une génératrice quelconque de l'hélicoïde, dont nous appelons z la hauteur b'O' au-dessus du plan horizontal; s, l'abscisse curviligne AB du point (B, B') de l'hélice; θ, l'angle au centre correspondant, de sorte que $\theta R = s$. Enfin, soit (Oh, $b'h'$), la direction des rayons lumineux, que nous prenons ici parallèle au plan vertical de projection, et supposons que $\omega = b'h'$O' soit l'angle de cette direction avec le plan horizontal.

Menons, par la génératrice (BO, B'b') de la surface, un plan P, parallèle à la direction des rayons lumineux. Déterminons, par la méthode habituelle, le point (m, m') de la génératrice où ce plan est tangent à

(*) Ce théorème est démontré, par d'autres considérations et d'une manière moins complète, dans MANNHEIM, *Géométrie descriptive*, 26me leçon, p. 378-380. Le savant professeur de l'École polytechnique ne signale pas explicitement la propriété relative à l'inclinaison des tangentes de l'hélice d'ombre. (P. M.)

l'hélicoïde. Il suffit pour cela, comme l'on sait, de porter sur la tangente BT au cercle O, une longueur BT = arc BA, de chercher l'intersection r de OT, avec la trace P du plan tangent, et d'abaisser de r, une perpendiculaire rm sur la projection horizontale BO de la génératrice considérée (*).

Le point (m, m') appartient à la courbe de contact cherchée. Prolongeons la droite mr, perpendiculaire à BO, jusqu'à sa rencontre en S avec une perpendiculaire à la ligne de terre. Je dis que OS sera de grandeur constante, et, par suite, le lieu du point m sera une circonférence décrite sur OS comme diamètre. En effet, le triangle rectangle OmS donne :

$$OS = \frac{Om}{\sin\theta}.$$

Les triangles Omr, OBT étant semblables, on a ensuite :

$$\frac{Om}{OB} = \frac{mr}{BT} = \frac{mr}{AB},$$

Donc, puisque $OB = R$, $AB = s$,

$$Om = mr\left(\frac{R}{s}\right).$$

Du point O, abaissons sur la trace P, la perpendiculaire $Op = mr$. On aura successivement :

$$mr = Op = Oh \sin\theta = O'h' \sin\theta = O'b' \frac{\sin\theta}{\operatorname{tang}\omega} = \frac{z \sin\theta}{\operatorname{tang}\omega}.$$

Combinant les diverses égalités que nous venons d'obtenir, nous trouvons :

$$OS = \frac{R}{\operatorname{tang}\omega}\frac{z}{s}.$$

Mais, par la définition même de l'hélice, on a $z = ks$, k étant une constante. Donc enfin :

$$OS = \frac{Rk}{\operatorname{tang}\omega},$$

valeur constante.

(*) Si l'on cherche, en effet, le plan tangent à l'hélicoïde, en (m, m'), on retrouve le plan P. (P. M.)

Nous poserons cette valeur constante égale à 2R', de sorte que

$$R' = \frac{1}{2}\frac{Rk}{\text{tang }\omega}.$$

Soient maintenant z' la hauteur du point (m, m') du lieu au-dessus du plan horizontal, et s', l'arc Om qui mesure le double de l'angle mOk ou θ. On aura

$$z' = z, \quad \frac{\frac{1}{2}s'}{R'} = \frac{s}{R}.$$

On conclut de là, eu égard à la relation $z = ks$, et à la valeur de R',

$$\frac{z'}{s'} = \frac{1}{2}\frac{Rk}{R'} = \text{tang }\omega.$$

La courbe de contact est donc une hélice dont les tangentes forment avec le plan horizontal un angle ω.

Il est aisé de voir que le pas de cette hélice est la moitié du pas de l'hélice directrice de la surface; car, lorsque le point B aura fait une demi-révolution, autour du point O, le point m en aura fait une entière sur la circonférence OmS.

On remarquera aussi que la courbe de contact est située par moitié sur chacune des deux nappes de l'hélicoïde(*).

SUR LA SÉRIE HARMONIQUE.

1° En partant de la formule connue

$$l\frac{n+p}{n-p} = 2\left[\frac{p}{n} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{p}{n}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{p}{n}\right)^5 + \cdots\right],$$

on trouve

$$2\frac{p}{n} < l\frac{n+p}{n-p} < 2\left[\frac{p}{n} + \left(\frac{p}{n}\right)^3 + \left(\frac{p}{n}\right)^5 + \cdots\right],$$

(*) Comme exercice, nous conseillons à nos jeunes lecteurs d'établir les résultats précédents par la géométrie analytique seule, comme l'a fait aussi M. Verstraeten dans la note qu'il nous a remise. (P. M)

c'est à dire :

$$2\frac{p}{n} < l\frac{n+p}{n-p} < \frac{p}{n-p} + \frac{p}{n-p}.$$

En particulier,

$$\frac{1}{n} < l\frac{n+\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}. \qquad (1)$$

2° Désignons par H_n la somme des n premiers termes de la série harmonique, et posons :

$$f(n) = H_n - l(n+\tfrac{1}{2}).$$

On a

$$f(n-1) - f(n) = l\frac{n+\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n},$$

et, par suite, à cause de la double inégalité (1),

$$0 < f(n-1) - f(n) < \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}. \qquad (2)$$

3° De la première partie de la double inégalité (2), on tire

$$f(n) < f(n-1),$$

ce qui prouve que $f(n)$ décroît, à mesure que n augmente. En d'autres termes, la fonction $H_n - l(n+\frac{1}{2})$ décroît depuis $f(1)$ jusqu'à $f(\infty)$, ce qui permet d'écrire

$$l(n+\tfrac{1}{2}) + f(\infty) \leqq H_n \leqq l(n+\tfrac{1}{2}) + f(1). \qquad (3)$$

4° Le calcul direct donne

$$f(1) = 1 - l\tfrac{3}{2} < 0{,}60.$$

D'autre part, si dans la seconde partie de la double inégalité (2), on fait successivement $n = 2, 3, 4, \ldots$, on obtient, par addition,

$$f(n) < f(1) + \frac{4}{3} - 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n}\right] - \frac{1}{2n+1},$$

et, en faisant croître n indéfiniment,

$$f(\infty) > 1 - l\tfrac{3}{2} + \tfrac{4}{3} - 2l2 > 0{,}54.$$

5° La double inégalité (3) devient donc

$$l(n+\tfrac{1}{2}) + 0{,}54 < H_n < l(n+\tfrac{1}{2}) + 0{,}60. \qquad (4)$$

6° *Remarque.* — La valeur de $f(\infty)$ est ordinairement désignée par C, et porte le nom de *constante d'Euler.* — Par d'autres procédés, on trouve $C = 0{,}577215664.....$ On peut donc, au lieu de (4), écrire

$$l(n+\tfrac{1}{2}) + 0{,}57 < H_n < l(n+\tfrac{1}{2}) + 0{,}60. \qquad (5)$$

ERNEST CESÁRO.

SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE.

Soit à chercher *le lieu géométrique des points de rencontre des tangentes communes à une courbe donnée* S *du second degré et à une circonférence variable* S', *touchant* S *en un point donné* O.

Prenons pour axes de coordonnées la tangente OX et la normale OY. Soient

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + 2Dy = 0, \qquad (A)$$

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0,$$

$$y = mx + n, \qquad (1)$$

les équations des courbes S, S' et celle d'une tangente commune. Les paramètres m, n vérifieront les équations (*)

$$Hn^2 + D^2m^2 - 2BDmn - 2CD\,n = 0, \qquad (2)$$

$$n^2 - R^2m^2 - 2Rn = 0, \qquad (3)$$

H désignant la quantité $B^2 - 4AC$.

Éliminons m^2 entre (2) et (3); après suppression de la solution $n = 0$, qui entraîne $m = 0$, et correspond à la tangente commune OX, nous aurons :

$$n(R^2H + D^2) - 2BDR^2m - 2DR(CR + D) = 0. \qquad (2')$$

Les équations (2') et (3) admettent deux systèmes de valeurs (m, n), $(m+\mu, n+\nu)$ qui déterminent les deux tangentes communes à S et S', autres que OX. Un point du lieu cherché est donc défini par les équa-

---

(*) Pour obtenir le plus simplement l'équation (2), on peut déduire, de (A) et (1), l'équation homogène $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + 2Dy\dfrac{y - mx}{n} = 0$, et exprimer que celle-ci a des racines égales. (J. N.)

tions (1), (2′) et (3), et les suivantes, qu'on en déduit après la substitution de $m + \mu$, $n + \nu$ à la place de m, n :

$$0 = \mu x + \nu, \tag{4}$$

$$\nu(R^2H + D^2) - 2BDR^2\mu = 0. \tag{5}$$

Il ne reste plus qu'à éliminer les paramètres variables m, n, R, $(\mu : \nu)$. On tire d'abord, de (4) et (5),

$$x(R^2H + D^2) + 2BDR^2 = 0. \tag{6}$$

Portant dans (2′) la valeur de $R^2H + D^2$ qui résulte de (6), on obtient :

$$2BDR^2n + 2BDR^2mx + 2DRx(CR + D) = 0,$$

ou, en divisant par 2DR,

$$BR(n + mx) + x(CR + D) = 0,$$

et, à cause de (1),

$$BRy + x(CR + D) = 0. \tag{7}$$

Enfin, l'élimination de R entre (6) et (7) conduit à l'équation cherchée :

$$B^2y^2 + 2BCxy + x^2(B^2 + C^2 - AC) + 2BDx = 0.$$

Le lieu est donc une conique tangente à OY au point O. Le binôme caractéristique qui indique le genre de la courbe est égal à $-B^2(B^2 - 4AC)$; par conséquent, si la courbe donnée C est une ellipse, le lieu cherché est une hyperbole et inversement. On constate, par un calcul facile, que les deux courbes ont même centre et mêmes axes de symétrie (*); par suite, comme elles se coupent orthogonalement, elles sont homofocales. P. Ruex.

NOTE.

La question dont M. Ruex vient de donner une solution très-simple, est due à Chasles et a été proposée au concours général de 1844. Les *Nouvelles Annales* de Gerono lui ont consacré plusieurs articles que nous croyons utile de résumer.

(*) L'angle α d'un axe de symétrie avec OX est donné par la formule

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{B}{A - C}. \qquad \text{(J. N.)}$$

1. M. J. A. Serret (année 1844) remplace, dans les équations (2) et (3), u par $y - mx$, x et y étant les coordonnées d'un point du lieu ; exprimant ensuite que les nouvelles équations admettent les deux mêmes valeurs de m, il obtient deux conditions entre lesquelles il élimine R.

2. M. Gerono (même année) donne la solution géométrique suivante. Soient : F, F', ω les foyers et le centre de S que nous supposons être une ellipse ; I le centre de S' ; MN, MP les tangentes communes à S et S', autres que OX ; N et P les points où ces tangentes sont rencontrées par OX. Les droites MF, MF', OF, OF' sont tangentes à une même circonférence. Car : 1° les angles NMP, FMF' ont même bissectrice ; 2° la normale OI à S est bissectrice de l'angle FOF' ; 3° la droite ωI qui joint les centres de deux coniques S, S' inscrites au quadrilatère MNOP(*), passe par les milieux des diagonales NP, MO ; unissant les milieux des diagonales MO, FF' du quadrilatère MFOF', elle est aussi le lieu des centres des coniques inscrites à ce quadrilatère. Il résulte, de là, que MF' — MF = OF' — OF ; par conséquent, le point M décrit une hyperbole homofocale à S.

Dans un second article (année 1852), M. Gerono généralise la question, en démontrant que le lieu ne change pas, quand on assujettit les cercles S' à passer par deux points fixes H, H' de S, situés sur une parallèle à OX.

3. Une solution due à M. Breton de Champ (année 1853), est fondée sur les principes de l'homologie ; elle est reproduite par M. Housel, dans son *Introduction à la Géométrie supérieure*.

4. En 1863, nous avons publié, en collaboration avec M. Mister, une solution analytique de la question généralisée ; nous la reproduisons ci-après, avec quelques modifications. Cette solution a été étendue par M. Paul Serret (année 1864) au cas où les cercles S' sont remplacés par un système de coniques homothétiques. Deux autres solutions qui n'en diffèrent pas essentiellement, sont dues à M. Doucet (année 1873) et à M. Macé de Lépinay (année 1880).

Soient X, Y les coordonnées d'un point M du lieu, et

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad Ax + By + C = 0,$$

(*) On considère les droites ON, OM comme faisant un angle infiniment peu différent de deux droits, et on applique le théorème, dû à Newton, sur le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère.

les équations de la conique fixe, et de la corde HH′ commune à S et à un cercle variable S′. Les tangentes menées de M à S étant représentées par

$$T=\left(\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-1\right)^2-S\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1\right)=0,$$

le cercle S′ peut être représenté par

$$T-(\alpha x+\beta y+\gamma)^2=0,$$

avec les conditions

$$\alpha^2-\beta^2=\frac{X^2-Y^2-c^2}{a^2b^2}, \qquad (M)$$

$$\alpha\beta=\frac{XY}{a^2b^2}. \qquad (N)$$

On voit facilement qu'un système de cordes communes à S et S′ a pour équation

$$\left(\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-1\right)^2-(\alpha x+\beta y+\gamma)^2=0.$$

En exprimant que l'une de ces cordes coïncide avec HH′, on trouve

$$\frac{\frac{X}{a^2}+\alpha}{A}=\frac{\frac{Y}{b^2}+\beta}{B}=\frac{-1+\gamma}{C}. \qquad (P)$$

Il reste à éliminer α, β, γ entre (M), (N), (P). On peut faire abstraction du rapport $\frac{-1+\gamma}{C}$, de sorte que le lieu ne dépend que du rapport $\frac{A}{B}$ ou de la direction de HH′. On constate aisément que les équations (N) et (P) sont vérifiées, quand on pose

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{Y}{b^2B}, \qquad \frac{\beta}{B}=\frac{X}{a^2A};$$

en portant les valeurs de α et β dans (M), on obtient l'équation du lieu :

$$\left(\frac{X^2}{a^2A^2}-\frac{Y^2}{b^2B^2}\right)\left(\frac{A^2}{b^2}+\frac{B^2}{a^2}\right)=\frac{c^2}{a^2b^2}.$$

Pour simplifier, introduisons les coordonnées (x', y') du point de contact d'une tangente parallèle à HH′, et posons $A=b^2x'$, $B=a^2y'$; il vient

$$\frac{a^2X^2}{x'^2}-\frac{b^2Y^2}{y'^2}=c^2.$$

5. La solution qui précède, ne donne pas *tout le lieu* : S et S′ ont quatre tangentes communes, et nous avons seulement considéré deux tangentes telles que leurs cordes de contact avec S et S′ se coupent sur la corde commune HH′. Le lieu complet se compose de la conique trouvée ci-dessus et d'une courbe du quatrième degré, ainsi que l'a indiqué le P. Lecointe, S. J. (*Nouvelles Annales*, année 1880).

6. Les cercles S′ passent par les points fixes H, H′ de la conique S, et par deux autres points fixes (les points circulaires à l'infini). On peut remplacer ces points par quatre points fixes quelconques A_1, A_2, A_3, A_4, et chercher le lieu des points de rencontre de deux tangentes communes à une conique donnée S, et à une conique variable S′, faisant partie d'un faisceau. Voici comment M. Darboux (*Nouvelles Annales*, année 1880) traite la dernière question.

Soient : (X, Y) les coordonnées d'un point M du lieu ; (x_r, y_r) celles de A_r ; $f(x, y) = 0$ l'équation de S ; $\varphi(x, y) = 0$ celle de la polaire de M par rapport à S. Les tangentes menées de M à S étant représentées par

$$F(x, y) = \varphi^2(x, y) - f(x, y) \cdot f(X, Y) = 0,$$

une conique quelconque admettant les mêmes tangentes a pour équation :

$$F(x, y) - (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = 0,$$

ou

$$\pm \sqrt{F(x, y)} - (\alpha x + \beta y + \gamma) = 0.$$

En exprimant qu'elle passe par les points A, et en éliminant ensuite α, β, γ, on aura l'équation du lieu cherché

$$\begin{vmatrix} \pm\sqrt{F(x_1, y_1)}, & x_1, y_1, 1 \\ \pm\sqrt{F(x_2, y_2)}, & x_2, y_2, 1 \\ \pm\sqrt{F(x_3, y_3)}, & x_3, y_3, 1 \\ \pm\sqrt{F(x_4, y_4)}, & x_4, y_4, 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation donne lieu à une discussion fort intéressante, pour laquelle nous nous contentons de renvoyer à l'article de M. Darboux.

(J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur la série* $(l2)^{-k} + (l3)^{-k} +$ etc. (*Mathesis*, p. 37). La divergence de la série

$$\frac{1}{(l2)^k} + \frac{1}{(l3)^k} + \frac{1}{(l4)^k} + \cdots + \frac{1}{(ln)^k} + \cdots,$$

résulte, comme celle de la série harmonique, d'un groupement convenable des termes (*Cours d'Analyse*, p. 8). Si, en effet, on suppose $u_p = 2^{p-1}$, on aura :

$$S_n > \frac{1}{(l2)^k} + \frac{2}{(l4)^k} + \frac{4}{(l8)^k} + \frac{8}{(l16)^k} + \cdots,$$

ou

$$S_n > \frac{1}{(l2)^k}\left[1 + \frac{2}{2^k} + \frac{4}{3^k} + \frac{8}{4^k} + \cdots\right].$$

Or, la nouvelle série est *toujours* divergente, attendu que $\lim[u_{n+1} : u_n] = 2$ (Extrait d'une lettre de M. E. CATALAN).

2. *Sur la même série.* M. Baehr, professeur à l'école polytechnique de Delft, après avoir fait la même remarque que M. Catalan, ajoute : « On se rend compte, pour ainsi dire, de la divergence de la série en observant que la courbe $y = \log x$ tend à devenir parallèle à l'axe des x, de sorte que, pour de grandes valeurs de x, les accroissements de $\log x$ sont infiniment petits, par rapport aux accroissements de x. Les termes de la série (pour de grandes valeurs de x), finissent par diminuer insensiblement, tellement que la somme de $2p$ termes consécutifs est plus grande que la somme de p termes consécutifs qui précèdent. »

×3. *Sur une équation analogue à celle de M. Prior.* L'équation cubique :

$$\left(\frac{a-b}{x} + \frac{b-x}{a} + \frac{x-a}{b}\right)\left(\frac{x}{a-b} + \frac{a}{b-x} + \frac{b}{x-a}\right) = 1,$$

analogue à celle de M. Prior (*Mathesis*, p. 42), a pour racines :

$$x_1 = a - b, \quad x_2 = b - a, \quad x_3 = a + b.$$

(Remarque de MM. O. CHARLIER, professeur à l'Athénée de Namur et PRÉVOST.)

×4. *Généralisation d'une propriété des podaires.* Le théorème énoncé (*Mathesis*, p. 7) est-il nouveau ? Il me semble que Chasles en a fait des applications. D'ailleurs, on peut toujours regarder deux courbes comme n'en formant qu'une d'un ordre supérieur (Remarque de M. E. CATALAN).

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 11.

Soit M *un point du plan d'un triangle* ABC, *tel que les droites* $\beta\alpha$, $\gamma\alpha'$, *menées par ce point parallèlement à* AB *et* AC, *rencontrent le périmètre du triangle en quatre points* α, β, γ, α' *situés sur une même circonférence. Démontrer : 1° que le lieu du point* M *est une droite; 2° que le lieu du centre de la circonférence* $\beta\gamma\alpha\alpha'$ *est une droite; 3° que la droite* $\gamma\alpha$ *enveloppe une parabole.* (J. N.)

1° Prenons AC et AB pour axes coordonnés. Soient x, y, les coordonnées du point M, et posons $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$. Toute conique passant par les points α, β, γ, α', sera représentée par l'équation

$$\left(\frac{X}{b}+\frac{Y}{c}-1\right)\left(\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}-1\right)+\lambda(X-x)(Y-y)=0. \qquad (1)$$

Pour que cette conique soit un cercle, il faut qu'on ait

$$\frac{1}{bx}=\frac{1}{cy}=\frac{1}{2\cos\theta}\left(\frac{1}{by}+\frac{1}{cx}+\lambda\right), \qquad (2)$$

θ désignant l'angle des axes. On conclut, de là, l'équation du lieu du point M :

$$cy-bx=0.$$

2° Soit $\frac{1}{\mu}$ la valeur (variable) des quantités (2). On aura

$$x=\frac{\mu}{b},\quad y=\frac{\mu}{c},\quad \lambda=\frac{2bc\cos\theta-c^2-b^2}{bc\mu}=-\frac{a^2}{bc\mu},$$

et l'équation (1) pourra s'écrire

$$bc(cX+bY-bc)(bX+cY-\mu)-a^2(bX-\mu)(cY-\mu)=0,$$

ou, en posant $cX+bY-bc=P$, $bX+cY=Q$, et en ordonnant par rapport à μ :

$$a^2\mu^2+\mu(bcP-a^2Q)+bc(a^2XY-PQ)=0. \qquad (3)$$

Complétons le carré commencé par les deux premiers termes :

$$\left(a\mu+\frac{bcP-a^2Q}{2a}\right)^2+a^2bcXY-\frac{(bcP+a^2Q)^2}{4a^2}=0.$$

On voit, dès lors, que la circonférence $\alpha\beta\gamma\alpha'$ est bitangente à la conique représentée par

$$4a^4bcXY - (bcP + a^2Q)^2 = 0, \qquad (4)$$

aux points où celle-ci est rencontrée par la droite (mobile) dont l'équation est

$$a\mu + \frac{bcP - a^2Q}{2a} = 0.$$

Cette droite se meut parallèlement à l'un des axes de la conique (4), et le centre de la circonférence se meut sur l'autre axe (*).

3° Les coordonnées des points γ et α étant $0, \frac{\mu}{c}$ et $\frac{\mu}{b}$, $\frac{c(b^2-\mu)}{b^2}$, on trouve facilement, pour l'équation de la droite $\gamma\alpha$,

$$b\mu^2 - \mu[x(b^2 + c^2) + bcy] + b^2c^2x = 0.$$

L'enveloppe de cette droite a pour équation :

$$[(b^2 + c^2)x + bcy]^2 - 4b^3c^3x = 0;$$

par suite, c'est une parabole.

V. JAMET,
Professeur au lycée de Pau.

NOTE.

Démonstration géométrique. 1° De l'égalité des angles $\beta\gamma\alpha'$, $\beta\alpha\alpha'$, on conclut que la droite $\gamma\beta$ se meut parallèlement à elle-même ; par suite, la droite AM qui passe par le milieu de $\gamma\beta$ est invariable. 2° Le centre ω de la circonférence $\alpha\beta\gamma\alpha'$ est à l'intersection des perpendiculaires élevées aux milieux δ, ε de $\alpha\beta$, $\gamma\alpha'$. Lorsque le point M se meut sur AM, les points δ, ε marquent, sur deux médianes du triangle ABC, des divisions homographiques semblables. Par conséquent, les droites $\delta\omega$, $\varepsilon\omega$, de directions invariables, se coupent sur une droite fixe. 3° La droite $\gamma\alpha$, joignant les points homologues de deux divisions homographiques semblables, enveloppe une parabole. (J. N.)

(*) On peut aussi éliminer μ entre les dérivées partielles de l'équation (3). (J. N.)

Question 21.

A un cercle donné O, *circonscrire un trapèze* ABCD, *connaissant les deux bases.*

Solution par M. le Dr S. Günther, professeur au lycée d'Ansbach (Bavière). Soient a et b les bases données AB, CD ($a > b$), x et y les côtés non parallèles AD, BC, et d le diamètre du cercle ; on a

$$x + y = a + b,$$

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a-b+x+y)(a-b+x-y)(a-b-x+y)(-a+b+x+y)} = \tfrac{1}{4}d(a-b).$$

On peut écrire cette deuxième équation de la manière suivante :

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2a\cdot 2b\,[(a-b)^2-(x-y)^2]} = d(a-b),$$

$$x - y = (a-b)\sqrt{1-\frac{d^2}{ab}}.$$

Donc on connaît la somme et la différence des deux côtés non parallèles.

Solution par M. Verhelst. Soient G, E les points de contact des bases AB, CD, et F, H ceux des côtés non parallèles BC, AD. Les triangles rectangles BOC, AOD donnent les équations (BG=BF=X, CE=CF=Y)

$$XY = r^2,$$

$$(a - X)(b - Y) = r^2,$$

dont la dernière revient à

$$aY + bX = ab.$$

On déduit, de là, une construction de X et Y (*).

Solution par M. P. Ruex. Menons, par le point C, la parallèle CK à DA, rencontrant AB en K. Dans le triangle CKB, on connaît la base $KB = a - b$, la somme $KC + CB = AD + CB = a + b$ des autres côtés et la hauteur d ou 2ρ. Le périmètre est donc $2a$. Par suite, si ρ est le rayon du cercle inscrit au triangle, on a $2a\rho = d(a - b)$. Une fois ρ connu, on trouve assez aisément l'angle KCB, et il est facile d'achever la construction.

(*) Si l'on prend pour inconnues BG = X, AG = Z, on trouve les équations plus simples : $X + Z = a$, $bXZ = r^2a$. La seconde s'obtient en remarquant que $b = DH + CF$, $DH.Z = r^2$, $CF.X = r^2$. (J. N.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**20.** On donne un point P sur une droite AP, un point Q sur une circonférence QBC. Trouver, sur celle-ci, un point R, tel que toute droite menée par R coupe AP en un point K, QBC en un point H, situés, l'un et l'autre, sur une circonférence passant par P, Q. (J. L. MACKENZIE).

×**21.** Soient : I_1, I_2, I_3 les centres des cercles exinscrits au triangle ABC; $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les points de contact des côtés; R, r les rayons des cercles circonscrit et inscrit à ABC; S_6 l'aire de l'hexagone $\gamma_1\beta_1\alpha_2\gamma_2\beta_3\alpha_3$; S_9 celle de l'ennéagone $\gamma_1 I_1 \beta_1 \alpha_2 I_2 \gamma_2 \beta_2 I_3 \alpha_3$; enfin, S_3 celle du triangle ABC. Démontrer les relations :

$$\frac{S_6 - S_3}{S_3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4Rr}, \quad \frac{S_9}{S_3} = \frac{4R}{r} - \frac{r}{2R}.$$

EDM. VAN AUBEL,
Élève à l'Athénée Royal de Liége.

22. Étant données une fonction entière $f(x)$ de degré n et $(n+1)$ quantités arbitraires $a, b, c, \ldots l$, déterminer la valeur des coefficients A, B,.. L, dans le développement

$$f(x) = Af(x-a) + Bf'(x-a-b) + Cf''(x-a-b-c) + \cdots$$
$$Nf^n(x-a-b-\cdots-l). \quad \text{(J. C. GLASHAN).}$$

23. Étant donnés cinq points d'une conique, on en prend quatre pour les sommets d'un quadrilatère et l'on mène, par le cinquième, deux droites quelconques, la première rencontrant deux côtés opposés en deux points, la seconde rencontrant les autres côtés aussi en deux points : les droites qui joignent ces points combinés deux à deux forment avec chaque groupe de côtés opposés deux quadrilatères tels que leurs diagonales se rencontrent sur la conique. (J. CARNOY.)

×**24.** *Théorèmes.* 1° Il y a une infinité de polyèdres à faces triangulaires, ne différant que par le nombre de leurs angles hexaèdres : mais il n'y en a pas deux qui diffèrent seulement par le nombre de leurs angles solides d'un autre ordre. 2° Il y a une infinité de polyèdres à faces quadrangulaires, ne différant que par le nombre de leurs angles tétraèdres : mais il n'y en a pas deux qui diffèrent seulement par le nombre de leurs angles solides d'un autre ordre. 3° Il n'y a pas deux polyèdres à faces pentagonales, qui ne diffèrent que par le nombre de leurs angles solides d'un certain ordre. (E. CESÁRO.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

Arithmétique.

18. Un nombre pair non divisible par 4 ne peut être la différence de deux carrés. Tout multiple de 4 est la différence de deux carrés.

19. La somme de deux fractions irréductibles dont les dénominateurs sont différents ne peut jamais se réduire à un nombre entier.

20. Trouver les restes des divisions de 43^{25} par 7, 11, 9, [1, — 1, 7. Observer que $43^{25} = (\text{M. } 9 - 2)^{25} = \text{M. } 9 - 2^{25}$ et que les puissances successives de 2, divisées par 9, donnent les restes 2, 4, — 1, — 2, — 4, 1].

21. Trouver la plus haute puissance de 11 qui divise le produit 1.2.3... 10000.

$$\left[\text{E}\left(\frac{10000}{11}\right) + \text{E}\left(\frac{10000}{11^2}\right) + \text{E}\left(\frac{10000}{11^3}\right),\right.$$ E (x) désignant le plus grand nombre entier contenu dans x $\left.\right]$ (*).

Algèbre.

Pour les exercices **22** et **23**, il suffit de résoudre l'équation et d'appliquer la théorie des trinômes du second degré à la quantité (discriminant) placée sous le signe radical.

22. Trouver la condition pour que les racines des équations suivantes soient réelles :

a) $x^2 + 2(m-2)x + 3m - 8 = 0$. [$m > 4$ ou < 3].

b) $ax^2 - 3ax + x + a = 0$. [$a > 1$ ou $< \frac{1}{3}$].

c) $\frac{a}{x} = \frac{x-1}{x-a}$. [$1 > a > -\frac{1}{3}$].

d) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{x-c}$. [$c$ non compris entre a et b].

e) $(a-x)(x-b) = x^2$. $\left[\frac{a}{b} > 3+2\sqrt{2}$ ou $< 3-2\sqrt{2}\right]$.

f) $(a-x)^2(b-x) = 3(x^3 - a^3)$. [$(b : a) > 22$ ou < -2].

g) $(a+b)x^2 - (a^2 - ab + b^2)x + a^3 + b^3 = 0$.

(*) Un élève du Collège communal d'Ostende, M. Doneux, nous communique l'énoncé suivant : « Le chiffre des dizaines d'un carré parfait n'est impair que si le chiffre des unités est 6. »

[Le discriminant est $-3(a^2-ab+b^2)(a^2+3ab+b^2)$; le facteur a^2-ab+b^2 étant toujours positif, il faut que $\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5}) > (a:b) > \frac{1}{2}(-3-\sqrt{5})$].

h) $$(x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)+a^2b^2c^2=0.$$

[Le discriminant étant $a^4-2a^2(b^2+c^2)+b^4-2b^2c^2+c^4$, il faut poser $a^2>(b+c)^2$ ou $<(b-c)^2$. Si $a>b>c>0$, il suffit que $a>b+c$].

i) $$\begin{cases} ax+by+cz=0. \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0. \end{cases}$$

[En multipliant, membre à membre, les équations $ax+by=-cz$, $ax^{-1}+by^{-1}=-cz^{-1}$, on trouve $a^2+b^2+ab(xy^{-1}+yx^{-1})=c^2$; par conséquent, xy^{-1} et yx^{-1} sont les racines de l'équation $abu^2-(c^2-a^2-b^2)u-ab$ qui a le même discriminant que l'équation *h*].

j) $$x^2-4x\sin\alpha+3\cos\alpha=0.$$

[Le discriminant étant $-4\cos^2\alpha-3\cos\alpha+4$, $\cos\alpha$ doit être compris entre -1 et $\frac{1}{8}(-3+\sqrt{73})$].

23. Les racines des équations suivantes sont toujours réelles :

a) $$\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{x^2-b^2}=4.$$

b) $$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+x}=0.$$

[Le discriminant de l'équation rendue rationnelle est $\Delta=a^2-a(b+c)+b^2-bc+c^2$, et le discriminant de Δ est négatif.]

c) $$\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}=0.$$

[Ici $\Delta=a^2(b^2-bc+c^2)-abc(b+c)+b^2c^2$; le coefficient de a^2, dans Δ, est toujours positif, et le discriminant de Δ est négatif.]

d) $$\frac{x-a}{x+a}+\frac{x-b}{x+b}+\frac{x-c}{x+c}=3,$$

e) $$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=0.$$

[Les équations *d*) et *e*) se ramènent facilement à l'équation *c*.] (J. N.)

NOTES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE,

par M. Éd. Lucas, professeur au lycée S. Louis à Paris.

1. Théorème I. *Si trois points d'une droite demeurent sur les faces d'un trièdre, un quatrième point de la droite décrit un ellipsoïde* (Dupin).

Prenons les trois plans pour plans de coordonnées. Soient A, B, C les points qui demeurent respectivement dans les plans des YZ, ZX, XY, et a, b, c, les distances de ces points au quatrième point M de coordonnées x, y, z. Les équations de la droite mobile sont :

$$\frac{X-x}{\alpha}=\frac{Y-y}{\beta}=\frac{Z-z}{\gamma}=\rho,$$

α, β, γ étant les coordonnés d'un point N situé sur une parallèle à MA menée par l'origine O, et à une distance de O égale à l'unité, ρ la distance du point (X, Y, Z) au point M. Si l'on exprime que les points A, B, C sont sur cette droite, on trouve

$$-x=a\alpha, \quad -y=b\beta, \quad -z=c\gamma.$$

On a, d'ailleurs,

$$\overline{ON}^2=1=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\cos(x,y)+2\beta\gamma\cos(y,z)+2\gamma\alpha\cos(z,x);$$

l'équation du lieu cherché est donc :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\frac{xy}{ab}\cos(x,y)+2\frac{yz}{bc}\cos(y,z)+2\frac{zx}{ca}\cos(z,x)=1.$$

2. Théorème II. *Si quatre points d'une droite demeurent sur les faces d'un tétraèdre, un cinquième point de la droite décrit un ellipse* (Mannheim).

D'après le théorème précédent, le lieu cherché est la courbe d'intersection de deux ellipsoïdes ; il suffit de démontrer que cette courbe est plane. Représentons par

$$P_r=A_rX+B_rY+C_rZ+D_r=0, \quad (r=1,2,3,4),$$

les quatre plans rapportés à des axes quelconques, et soient a, b, c, d, les distances des quatre points A, B, C, D au cinquième M (x, y, z). En exprimant que le point A dont les coordonnées sont $x+\alpha a$, $y+\beta a$, $z+\gamma a$, se trouve dans le plan P_1, on a

$$A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{a}=0,$$

et de même pour les autres points; d'où l'on déduit, par élimination,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \frac{P_1}{a} \\ A_2 & B_2 & C_2 & \frac{P_2}{b} \\ A_3 & B_3 & C_3 & \frac{P_3}{c} \\ A_4 & B_4 & C_4 & \frac{P_4}{d} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est l'équation d'un plan.

3. THÉORÈME III. *Si quatre points d'une droite demeurent sur les faces d'un tétraèdre, cette droite reste parallèle aux génératrices d'un cône de révolution* (MANNHEIM).

En effet, si l'on prend les trois premiers plans pour plans de coordonnées, et si l'on exprime que le point M (voir 1°) demeure sur le quatrième plan P_4, on a

$$A_4\,\alpha\alpha + B_4\,b\beta + C_4\,c\gamma - D_4 = 0.$$

Donc le point N décrit l'intersection d'une sphère et du plan déterminé par l'équation précédente. C. q. f. d.

NOTE. — Les théorèmes dont M. Lucas vient de donner une démonstration très-remarquable sont, en quelque sorte, la généralisation des propriétés suivantes qui sont mieux connues : *Si deux points* A, B *d'une droite mobile demeurent sur deux droites fixes non situées dans un même plan, cette droite reste parallèle aux génératrices d'un cône de révolution dont l'axe est parallèle à la plus courte distance des directrices; tout point de* AB *décrit une ellipse; le milieu de* AB *parcourt une circonférence de cercle, lorsque les directrices sont rectangulaires.* (J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

5. *Sur le limaçon de Pascal* (*Mathesis*, p. 43). M. Ed. Lucas nous signale le théorème suivant qui lui a été communiqué verbalement par M. Mannheim : *Si les côtés d'un angle constant restent tangents à deux circonférences fixes, la droite qui joint les points de contact enveloppe une conique.*

Cette proposition ne diffère pas essentiellement d'une question que nous avons proposée et résolue dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. III, p. 176, et t. VI, p. 463.

Ajoutons que *la circonférence qui passe par le sommet de l'angle mobile et par les points de contact des côtés enveloppe un limaçon de Pascal* (podaire de circonférence). En effet, cette ligne passe par un point fixe et son centre parcourt une circonférence (J. N.)

SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

1. *Valeur de l'intégrale.* L'intégrale définie

$$L = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx,$$

où n est supposé positif, est égale, *par définition*, à la limite de

$$I = \int_0^{X} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx,$$

pour X infini. On peut regarder I, à son tour, comme la limite, pour $\varepsilon = 0$, de

$$J = \int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-x} dx}{x} - \int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-nx} dx}{x}.$$

Posons $nx = z$, dans la seconde des intégrales qui composent J. Il viendra :

$$J = \int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-x} dx}{x} - \int_{n\varepsilon}^{nX} \frac{e^{-z} dz}{z},$$

c'est-à-dire, en décomposant chacune des intégrales du second membre :

$$J = \int_{\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{e^{-x} dx}{x} + \int_{n\varepsilon}^{X} \frac{e^{-x} dx}{x} - \int_{n\varepsilon}^{X} \frac{e^{-z} dz}{z} - \int_{X}^{nX} \frac{e^{-z} dz}{z},$$

ou, en supprimant les deux intégrales intermédiaires qui sont égales et de signes contraires,

$$J = \int_{\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{e^{-x} dx}{x} - \int_{X}^{nX} \frac{e^{-z} dz}{z}.$$

Dans la première des deux dernières intégrales, e^{-x} est compris entre $e^{-\varepsilon}$ et $e^{-n\varepsilon}$, et, dans la seconde, e^{-z} est compris entre e^{-X} et e^{-nX}. Par suite, l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{e^{-x} dx}{x}$$

est comprise entre

$$\int_{\varepsilon}^{n\varepsilon} e^{-x}\frac{dx}{x} = e^{-\varepsilon} ln \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon}^{n\varepsilon} e^{-nx}\frac{dx}{x} = e^{-n\varepsilon} ln,$$

et l'intégrale

$$\int_{X}^{nX} \frac{e^{-z}dz}{z}$$

est comprise entre

$$\int_{X}^{nX} e^{-x}\frac{dz}{z} = e^{-X} ln \quad \text{et} \quad \int_{X}^{nX} e^{-nx}\frac{dz}{z} = e^{-nX} ln.$$

On pourra donc écrire

$$J = (A - B)\, ln$$

A et B désignant respectivement des quantités comprises entre

$$(e^{-\varepsilon} \text{ et } e^{-n\varepsilon}), \quad (e^{-X} \text{ et } e^{-nX}).$$

Si ε tend indéfiniment vers zéro, on a

$$\lim e^{-\varepsilon} = \lim e^{-n\varepsilon} = \lim A = 1.$$

Donc

$$I = (\lim J)_{\varepsilon=0} = (1 - B)\, ln.$$

Si X croît indéfiniment, on a de même :

$$\lim e^{-X} = \lim e^{-nX} = \lim B = 0.$$

Par conséquent

$$L = (\lim I)_{X=\infty} = ln.$$

2. ***Remarques.*** I. La démonstration précédente est empruntée, en substance, à un petit mémoire de SCHAAR (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, première série, t. XIII, 2e partie, p. 30 et suiv.). M. BERTRAND, dans son *Calcul intégral*, n° 275-281, p. 221-223, fait connaître une formule générale de FRULLANI :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x} dx = \varphi(0)\, l\left(\frac{b}{a}\right),$$

d'où l'on pourrait déduire la valeur de I, en faisant $\varphi(x) = e^{-x}$, $a = 1$, $b = n$. Inversement, la méthode de Schaar, dont celle de M. Bertrand ne diffère pas essentiellement, permet de démontrer la formule de Frullani et de voir comment il faut la modifier quand elle est en défaut.

II. Dans la plupart des traités de calcul intégral, on trouve la valeur

de L, en intervertissant l'ordre des intégrations dans le premier membre de l'égalité :

$$\int_1^n dy \int_0^\infty e^{-xy}\, dx = \int_1^n \frac{dy}{y} \text{ ou } ln.$$

Mais cette manière de procéder n'est pas légitime, parce qu'il n'est pas toujours permis de changer l'ordre des intégrations dans une intégrale double, quand l'une des limites est infinie.

III. Voici encore, pour arriver à la valeur de L, un autre procédé, qui ne nous semble pas irréprochable. Soit

$$\varphi(n) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\, dx, \quad \varphi(m) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-mx}}{x}\, dx;$$

on aura

$$\varphi(m) - \varphi(n) = \int_0^\infty \frac{e^{-nx} - e^{-mx}}{x}\, dx,$$

ou, en posant $nx = z$,

$$\varphi(m) - \varphi(n) = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-\frac{m}{n}z}}{x}\, dx = \varphi\left(\frac{m}{n}\right).$$

La fonction $\varphi(n)$, satisfaisant à la relation précédente et telle que $\varphi(1) = 0$, est égale, d'après une remarque de Cauchy, à Cln, C étant une constante. On a donc

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\, dx = Cln.$$

Pour déterminer C, dérivons par rapport à n. Il viendra :

$$D_n \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \int_0^\infty D_n \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\, dx = \int_0^\infty e^{-nx}\, dx \text{ ou } \frac{1}{n} = \frac{C}{n}.$$

Donc $C = 1$, et, par suite, $L = ln$.

Cette seconde manière de trouver la valeur de L est au moins aussi défectueuse que la première. En effet, en premier lieu, on ne sait pas si $\varphi(n)$ est fini ; ensuite, rien ne prouve qu'il soit permis de dériver, sous le signe, l'intégrale $\varphi(n)$, par rapport à n.

IV. Rappelons encore, à propos de l'intégrale L, un paradoxe signalé habituellement dans les cours (*). Posons,

$$L_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\, dx}{x}, \quad L_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-nx}\, dx}{x},$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIII, p. 576, XIV, 227.

ce qui entraîne $L = L_1 - L_2$. Faisons, dans L_2, $nx = z$. Il viendra :

$$L_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-nx}\,dx}{x} = \int_0^\infty \frac{e^{-z}\,dz}{z} = L_1.$$

Donc $L = L_1 - L_2 = 0$.

Ce résultat absurde provient de ce que l'on a opéré sur L_1 et L_2, qui sont infinis, comme sur des quantités finies. C'est pour éviter un inconvénient semblable que nous avons ramené l'étude de I à celle de J. L'intégrale I peut aussi se décomposer en la différence de deux intégrales infinies

$$\int_0^X \frac{e^{-x}\,dx}{x}, \quad \int_0^X \frac{e^{-nx}\,dx}{x},$$

sur lesquelles, naturellement, il est impossible de faire aucun calcul.

Les considérations précédentes sont très propres à montrer combien il importe de définir, comme l'a fait Cauchy, les intégrales ayant une limite infinie ou présentant quelque autre singularité. (P. M.)

BIBLIOGRAPHIE.

The Teacher's Hand-Book of Algebra; containing methods, solutions and exercises illustrating the latest and best treatment of the Elements of Algebra, by J. A. McLellan, M. A., LL. D., High School Inspector for Ontario. Second Edition, revised and enlarged. Toronto : W. G. Gage et Company (London, W. Kent and Co, Paternoster Row), 1881; v-296-xxxix pages in-12. Prix : Dollar 1.25.

Cet ouvrage, dont la première édition, publiée en 1879, contenait 100 pages de moins que la seconde, a eu un grand succès au Canada, aux États-Unis et en Angleterre. C'est un recueil très bien fait, très complet et très original d'environ 3000 exercices sur le calcul algébrique et les équations du premier et du second degré, et même de degré supérieur, quand on peut les résoudre par des procédés élémentaires. L'auteur traite, en tête de chaque paragraphe, un certain nombre de questions types, et les fait suivre d'autres questions analogues de plus en plus difficiles, dont la solution, sans développements, est donnée à la fin du volume.

Ce qui caractérise essentiellement l'ouvrage de M. McLellan et le distingue de la foule des recueils du même genre, c'est que les sujets abordés par l'auteur sont exposés d'une manière aussi complète qu'il est possible de le faire, sans sortir de l'algèbre élémentaire. Par exemple, partant du principe : *Si un polynome s'annule pour $x = a$, il est divisible par $x - a$*, il en épuise toutes les conséquences, pour la résolution des polynômes en facteurs, pour la simplification des expressions fractionnaires, pour la recherche des racines des équations. Chemin faisant, il fait

connaître la raison de la plupart des soi-disant artifices de calcul dont on se sert dans les parties élevées des mathématiques.

Nous sommes persuadé que l'étudiant qui aura beaucoup pratiqué le livre de M. McLellan sera vraiment rompu à toutes les finesses du calcul algébrique et ne rencontrera plus d'énigme insoluble en fait de transformations algébriques. C'est pourquoi nous le recommandons aux lecteurs de la *Mathesis*. Aux professeurs, nous signalons spécialement tout ce qui se rapporte à la décomposition des expressions algébriques en facteurs : ils y trouveront certainement maintes bonnes remarques qu'on ne rencontre pas ailleurs. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 12.

Appelons directrice d'une chaînette, l'axe des abscisses quand cette courbe a pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Cela posé, démontrer que si cette chaînette roule extérieurement sur un cercle de rayon a, *le pied de la perpendiculaire abaissée du point de contact sur la directrice décrit une spirale d'Archimède.* (P. M.)

SECONDE SOLUTION.

Soient A le sommet de la chaînette représentée par l'équation donnée, B une position quelconque de ce même point, O l'origine, C le pied de la directrice correspondant au sommet B, D le point de contact de la chaînette avec la circonférence OA, CM la directrice, M la projection de D sur CM, DE la tangente à la chaînette (et à la circonférence) au point D; OX, une perpendiculaire à OA.

Si l'on prend, sur cette tangente, un point E tel, que DE = arc DB, il est clair que l'on aura aussi DE = arc AD. D'autre part, en vertu d'une propriété bien connue, la perpendiculaire EF à ED, limitée à la directrice CM, a pour longueur a, et le point F doit être la projection du point de contact de la tangente DE. Par conséquent, le point F coïncide avec le point M et la question se transforme en la suivante :

On donne une circonférence fixe OA *et un arc* AE *de sa développante. On prend sur la tangente* EM *à cette développante un point* M *tel que le segment* EM *soit égal à* OA. *Trouver le lieu du point* M.

Comme EM est, par construction, égal et parallèle à OD, le quadrilatère MEOD est un rectangle; OM, rayon vecteur du point M, est égal à DE ou à l'arc AD. Si donc l'on désigne MO et les angles MOX et AOD par r, θ et α, l'on a

$$OM = r = DE = a\alpha = a(\pi - \theta),$$

équation d'une *spirale d'Archimède*.

Il est intéressant de rappeler, à ce sujet, le théorème suivant, dû à M. Haton de la Goupillière (*Nouvelles Annales*, 1863, T. II, pp. 336, 497 et 548) : *La caustique par réflexion de la développante d'un cercle, pour des rayons émanés du centre est une développée de la spirale d'Archimède.* (H. Brocard.)

Note. — Puisque EM est la tangente à la développante de cercle, le lieu de M est la *podaire* de O par rapport à cette courbe; MD et MC sont la normale et la tangente à la spirale d'Archimède; par conséquent, l'*enveloppe de la directrice de la chaînette est la même spirale.* (J. N.)

Question 23.

Soient I, I′, I″, I‴ *les centres des cercles inscrits et ex-inscrits au triangle* ABC; r, α, β, γ *les rayons de ces cercles*, R *le rayon du cercle circonscrit à* ABC, *démontrer que:*

$$II'I''I'''.r = II''I'''.\alpha = II'I'''.\beta = II'I''.\gamma = ABC.2R \qquad (1)$$

(J. Neuberg.)

Je commencerai par démontrer le théorème suivant : *La surface d'un triangle* ABC *est égale au rayon du cercle circonscrit multiplié par le demi-périmètre du triangle* MNP *qui a pour sommets les pieds des hauteurs du triangle.* Supposons les angles du triangle aigus. Soient H le point de concours des hauteurs, et O le centre du cercle circonscrit. On a :

$$\text{aire ABC} = \text{ONAP} + \text{OPBM} + \text{OMNC}.$$

A cause du quadrilatère inscriptible PNCB, si nous tirons la tangente AT, au cercle passant par A, B, C, l'angle TAN sera égal à l'angle ABC et par suite à ANP, et OA sera perpendiculaire sur NP. Il en résulte

$$\text{aire ONAP} = \tfrac{1}{2}\,\text{OA}.\,\text{NP};$$

de même

$$\text{aire OPBM} = \tfrac{1}{2}\,\text{OB}.\,\text{PM}, \qquad \text{aire OMNC} = \tfrac{1}{2}\,\text{OC}.\,\text{MN}.$$

Par suite

$$\text{aire ABC} = \tfrac{1}{2} R\,(MN + NP + PM).$$

Il est facile de modifier la démonstration, dans le cas où l'un des angles est obtus.

On déduit le théorème proposé de celui qui précède comme il suit. Le triangle ABC a pour sommets les pieds des hauteurs des triangles I'I''I''', II'I'', II'I''', II''I''', dont les rayons des cercles circonscrits sont, par suite, égaux à 2 R. Donc, en désignant par a, b, c, p les côtés et le demi-périmètre du triangle ABC, on aura :

$$\begin{gathered} ABC = pr = (p-a)\,\alpha = (p-b)\,\beta = (p-c)\,\gamma, \\ I'I''I''' = p \cdot 2R, \qquad II''I''' = (p-a)\,2R, \qquad (2) \\ II'I''' = (p-b)\,2R, \qquad II'I'' = (p-c)\,2R. \end{gathered}$$

L'élimination de p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ successivement entre les égalités (2) et chacune des suivantes conduit à la relation cherchée.

Remarque. L'égalité des quatre premières quantités (1) peut se déduire directement de triangles semblables.

EDMOND VAN AUBEL,
Élève de l'Athénée de Liége.

×Question 25.

Toute puissance entière de 3 *est une somme de trois carrés premiers avec* 3 (*). (E. CATALAN.)

I.

Ce théorème peut se déduire de propositions plus générales.

1. On a l'identité, due à Euler,

$$(x_1^2 + Ay_1^2)(x_2^2 + Ay_2^2) = (x_1x_2 \pm Ay_1y_2)^2 + A(x_1y_2 \mp x_2y_1)^2.$$

Faisant

$$\begin{gathered} x_1x_2 \pm Ay_1y_2 = X_2, \quad x_1y_2 \mp x_2y_1 = Y_2, \\ x_3X_2 \pm Ay_3Y_2 = X_3, \quad x_3Y_2 \mp X_2Y_3 = Y_3, \end{gathered}$$

on aura, de même,

$$(x_1^2 + Ay_1^2)(x_2^2 + Ay_2^2)(x_3^2 + Ay_3^2) = X_3^2 + AY_3^2,$$

et ainsi de suite. Donc *le produit d'un nombre quelconque de facteurs de la forme* $x^2 + Ay^2$, *est également de cette forme.*

(*) On remarquera que les articles de MM. Neuberg et Réalis contiennent la solution de questions beaucoup plus générales que ne l'indique cet énoncé. (P. M.)

Supposons ces facteurs égaux entre eux, et soit $A = 2$; nous pourrons écrire

$$(x_1^2 + 2y_1^2)^n = X_n^2 + 2Y_n^2,$$

les quantités X, Y se calculant, par voie récurrente, au moyen des formules

$$X_n = x_1 X_{n-1} \pm 2y_1 Y_{n-1}, \quad Y_n = x_1 Y_{n-1} \mp y_1 X_{n-1}.$$

Dans le cas particulier de $x_1 = 1$, $y_1 = 1$,

$$X_n = X_{n-1} \pm 2Y_{n-1}, \quad Y_n = Y_{n-1} \mp X_{n-1}. \tag{1}$$

Il est facile de voir que, si X_{n-1} et Y_{n-1} sont premiers avec 3, l'une des solutions (1) donne aussi, pour X_n et Y_n, des nombres premiers avec 3.

2. On peut obtenir, directement, les valeurs de X_n et Y_n. En effet,

$$(x_1^2 + Ay_1^2)^n = (x_1 + y_1\sqrt{-A})^n (x_1 - y_1\sqrt{-A})^n.$$

Développons les deux facteurs du deuxième membre par le binôme de Newton et désignons par X_n la partie rationnelle, par $\pm Y_n\sqrt{-A}$ la partie irrationnelle des deux développements; nous aurons

$$(x_1^2 + Ay_1^2)^n = (X_n + Y_n\sqrt{-A})(X_n - Y_n\sqrt{-A}) = X_n^2 + AY_n^2.$$

S'il s'agit de 3^n, on a :

$$X_n = \frac{1+\sqrt{-2})^n + (1-\sqrt{-2})^n}{2}, \quad Y_n = \frac{(1+\sqrt{-2})^n - (1-\sqrt{-2})^n}{2\sqrt{-2}}.$$

3. Le théorème de M. Catalan peut encore se conclure des identités publiées, par M. Réalis, dans le t. IV, p. 325 de la *Nouvelle correspondance mathématique*. Posons

$$u_1 = Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2, \quad u_2 = Ax_2^2 + By_2^2 + Cz_2^2,$$

$$v = 2(Ax_1x_2 + By_1y_2 + Cz_1z_2),$$

$$x_3 = u_1x_2 - vx_1, \quad y_3 = u_1y_2 - vy_1, \quad z_3 = u_1z_2 - vz_1;$$

nous aurons, identiquement,

$$u_1^2u_2 = Ax_3^2 + By_3^2 + Cz_3^2.$$

Donc, *si deux nombres u_1, u_2 sont de la forme $Ax^2 + By^2 + Cz^2$, $u_1^2u_2$ et, plus généralement, $u_1^{2n}u_2^{2p+1}$ sont de la même forme.*

Faisant $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = -z_1$, on trouve

$$(Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2)^3 = Ax_3^2 + By_3^2 + Cz_3^2,$$

identité dans laquelle

$$\frac{x_3}{x_1}=\frac{y_3}{y_1}=Ax_1^2+By_1^2-3Cz_1^2,\quad \frac{z_3}{z_1}=3Ax_1^2+3By_1^2-Cz_1^2.$$

Pour $A=1$, $x_2=1$, $y_2=z_2=0$, l'égalité (2) devient

$$(x_1^2+By_1^2+Cz_1^2)^2=(-x_1^2+By_1^2+Cz_1^2)^2+B(2x_1y_1)^2+C(2x_1z_1)^2.$$

Il est facile de conclure, de là, *que toute puissance de* $u=x^2+y^2+z^2$ *est égale à une somme de trois carrés premiers avec u.* (J. N.)

II.

1. Posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} X&=abx-(a+b)(by+az),\\ Y&=aby-(a+b)(bz+ax),\\ Z&=abz-(a+b)(bx+ay), \end{aligned}\qquad (3)$$

on a la relation :

$$X^2+Y^2+Z^2=(a^2+ab+b^2)^2(x^2+y^2+z^2). \qquad (4)$$

D'après cela : *x, y, z étant des nombres premiers entre eux, et n désignant un nombre de la forme* a^2+ab+b^2, *l'expression* $n^2(x^2+y^2+z^2)$ *peut être transformée directement en une somme de trois carrés, premiers entre eux par rapport à n.* Pour aller au devant de quelques objections, il est bon d'observer que l'on est libre de choisir les signes de x, y, z et d'échanger ces lettres entre elles à volonté.

Si, dans l'indentité (4), on fait $a=1$, $b=1$, on voit que la décomposition de 3^{2n} et 3^{2n+1} en trois carrés, entraîne celle de 3^{2n+2} et 3^{2n+3}.

2. On peut donner, aux formules (3), une forme plus avantageuse au point de vue de la théorie des nombres. On a

$$a^2+ab+b^2=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+3\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

ce qui conduit à poser :

$$\frac{a}{2}=\alpha,\quad b+\frac{a}{2}=\beta,\quad a^2+ab+b^2=3\alpha^2+\beta^2.$$

Si l'on fait encore

$$x=A,\ y=A+B+C,\ z=C,$$

on verra que *le produit* $(3\alpha^2+\beta^2)^2(x^2+y^2+z^2)$ *est la somme de trois*

carrés compris dans une même forme $(Au^2 + Buv + Cv^2)^2$ (*). Ainsi, par exemple, en fesant $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 7$, on trouve

$$7^2 . 54 = 2^2 + 31^2 + 41^2 = 2646.$$

Les trois carrés 2^2, 31^2, 41^2 sont de la forme $(2u^2 - 8uv + 7v^2)^2$, comme il est aisé de le voir.

3. On déduit immédiatement des formules (3) ce corollaire que : *la somme de trois carrés entiers peut être transformée d'une infinité de manières, et au moyen de formules directes, en une somme de trois carrés rationnels.*

On reconnaît de même que : 1° *Tout nombre k, de la forme $x^2+y^2+z^2$, est diviseur d'une infinité de nombres appartenant à la même forme et non divisibles par k^2.* 2° *Tout carré n^2, de la forme $p^2 + pq + q^2$, est diviseur d'une infinité de nombres appartenant à la forme $X^2 + Y^2 + Z^2$, et non divisibles par n^3.*

S. Realis,
Ingénieur à Turin.

Question 27.

Démontrer que la série

$$\frac{1.2}{3.4.5.6} + \frac{2.3}{4.5.6.7} + \frac{3.4}{5.6.7.8} + \cdots \qquad (1)$$

est convergente et a pour somme $\frac{1}{9}$. (J. N.)

Solution par F. Fouquet, *élève du collège communal d'Ostende.* Le n^e terme de (1) peut être décomposé ainsi :

$$\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{A}{(n+2)(n+3)} + \frac{B}{(n+3)(n+4)} + \frac{C}{(n+4)(n+5)}.$$

Chassant les dénominateurs de cette *identité* et égalant les coefficients des mêmes puissances de n dans les deux membres, on obtient

$$A + B + C = 1, \quad 9A + 7B + 5C = 1, \quad 20A + 10B + 6C = 0,$$

d'où

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{8}{3}, \qquad C = \frac{10}{3}.$$

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII (1878), p. 180, et *Nouvelle Correspondance*, t. IV, p. 326.

Le terme général de (1) est donc égal à

$$\frac{1}{3(n+2)(n+3)} - \frac{8}{3(n+3)(n+4)} + \frac{10}{3(n+4)(n+5)},$$

et la série peut s'écrire :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots\right)-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots\right)+\frac{10}{3}\left(\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\cdots\right)$$

Les nouvelles séries entre parenthèses sont convergentes et ont, respectivement, pour sommes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ (*Mathesis*, p. 32).

Par conséquent, la série proposée est également convergente et a pour somme

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{9}.$$

Solution par M. E. Verhelst. Appelons $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}, u_n$, les termes de la série et soit

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

On trouve sans peine :

$$\begin{aligned}
&u_n(n-1)(n+5) = u_{n-1}(n+1)^2,\\
&u_{n-1}(n-2)(n+4) = u_{n-2}n^2.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_3 \times 2 \times 8 = u_2 \cdot 4^2,\\
&u_2 \times 1 \times 7 = u_1 \cdot 3^2.
\end{aligned}$$

D'où, par addition, en observant que

$$(n-2)(n+4)-(n+1)^2 = -9,$$

et faisant passer tous les termes dans le premier membre :

$$u_n(n-1)(n+5) - 9u_{n-1} - 9u_{n-2} - \cdots - 9u_2 - 9u_1 = 0.$$

Ajoutons $9u_n$ aux deux membres, il viendra, après quelques transpositions,

$$9S_n = u_n[9+(n-1)(n+5)] = u_n(n+2)^2$$

$$S_n = \frac{1}{9}\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}.$$

Divisant le numérateur et le dénominateur par n^3, puis faisant croître n indéfiniment, on trouve $\frac{1}{9}$ pour la somme de la série indéfinie.

×Question 30.

On donne un point P *sur une droite* AP, *un point* Q *sur une circonférence* QBC. *Trouver, sur celle-ci, un point* R, *tel que toute droite menée par* R *coupe* AP *en un point* K, QBC *en un point* H, *situés, l'un et l'autre, sur une circonférence passant par* P *et* Q. (J. L. MACKENZIE.)

Supposons le problème résolu. Menons la droite PQ, qui coupe la circonférence en M, et tirons MR. Le quadrilatère inscriptible PQHK donne :

$$\text{angle KPQ} + \text{angle KHQ} = 180^\circ.$$

Mais, dans le quadrilatère inscrit MQHR, on a aussi :

$$\text{angle RMQ} + \text{angle RHQ} = 180^\circ;$$

donc l'angle RMQ égale l'angle KPQ, et MR est parallèle à AP. On déduit, de là, une construction facile du point R. (EDM. VAN AUBEL.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

×35. Étant donnée une circonférence AMBN de diamètre AB, on projette chaque corde MN, perpendiculaire à AB, en PQ, sur un diamètre CD, parallèle à MN. Le lieu des points *m*, *n*, intersections des droites AP, AQ, avec MN est une courbe fermée dont l'aire est égale à celle de la circonférence. (J. MISTER.)

Si l'on prend, au lieu de la circonférence, une courbe quelconque ayant un axe de symétrie CD, on en déduit, par le procédé indiqué ici, une autre courbe de même aire (J. M.).

36. Trois droites, issues des trois sommets d'un triangle, et partageant les côtés opposés en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents, se coupent évidemment en un même point. Démontrer que ce point est le centre d'une infinité d'ellipses semblables, dont chacune est le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux côtés du triangle est constante. Pour un triangle donné, chercher la direction des axes des ellipses. (E. CESÁRO.)

37-39. I. D'un point quelconque P d'une parabole, on abaisse les deux normales PA, PB, rencontrant la parabole en A, B. Trouver : 1° l'équation de la droite AB; 2° le lieu de la projection du point P sur AB.

II. On mène par le point P des perpendiculaires à PA et PB; ces droites rencontrent la parabole aux points C et D; trouver : 1° l'équation de la droite CD; 2° l'enveloppe de CD; 3° le lieu de l'intersection de AB et CD; 4° le lieu de la projection du point P sur CD; 5° le lieu de l'intersection de CD avec la tangente au point P; 6° le lieu de l'intersection de CD avec la normale au point P.

III. On mène, par le point P, les bissectrices de l'angle APB; ces droites rencontrent la parabole aux points E et F; trouver : 1° l'équation de EF; 2° le lieu de l'intersection de EF avec AB; 3° avec CD; 4° avec la tangente en P à la parabole; 5° avec la normale en P; 6° avec la perpendiculaire abaissée du point P sur EF; 7° l'enveloppe de EF.

(Ed. Lucas.)

40. D'un point P, pris sur la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC, on abaisse des perpendiculaires PA', PB', PC', sur les côtés. Démontrer que les droites PA', B'C' se coupent sur la médiane issue de A. (E. Cesáro.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

24. Si $a > b > c > d$, l'équation

$$f(x) = (x-a)(x-c) + (x-b)(x-d) = 0,$$

a une racine comprise entre a et b, et l'autre comprise entre c et d.

[On a : $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f(c) < 0$, $f(d) > 0$.]

25. Deux mobiles, partant simultanément des extrémités de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, se dirigent vers le sommet de l'angle droit avec des vitesses constantes, v, v'. A quel instant sont-ils le plus proche l'un de l'autre ? [Chercher le minimum de $(b - vx)^2 + (c - v'x)^2$].

26. Déterminer a de manière que la somme des carrés des racines de l'équation $x^2 - (a-2)x - (a-3) = 0$ soit la plus petite possible [$a = 1$].

27. Trouver le maximum et le minimum de l'expression :

$$y^2 = \frac{4a^2x^2 + b^2(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}, \qquad (1)$$

dans laquelle $a^2 > b^2$. [Exprimant que l'équation (1) donne pour x^2 : 1° des valeurs réelles; 2° des valeurs positives, on trouve $a^2 > x^2 > b^2$].

28. Soient x et y des variables assujetties à vérifier l'équation

$$x^2 + xy + y^2 = K^2, \qquad (2)$$

trouver les valeurs de x et y qui font prendre à l'expression

$$m = ax + by \qquad (3)$$

sa plus grande valeur. [Eliminant y entre (2) et (3), on obtient, pour la condition de réalité de x, $m^2 \leqq \frac{4}{5} k^2 (a^2 - ab + b)^2$.]

29. Déterminer a et b de manière que α et β soient, respectivement, le maximum et le minimum de l'expression

$$m = \frac{ax^2 + 2x + b}{x^2 + 1}.$$

[α et β doivent être les racines de l'équation $m^2 - m(a + b) + ab - 1 = 0$; d'où $a + b = \alpha + \beta$, $ab - 1 = \alpha\beta$. Donc a et b sont donnés par l'équation $a^2 - a(\alpha + \beta) + \alpha\beta + 1 = 0$. On doit avoir $\alpha > \beta$ et $\alpha - \beta > 2$.]

30. Déterminer p et p' de manière que la fraction

$$m = \frac{x^2 + px - 3}{x^2 + p'x + 5}$$

soit maximum ou minimum pour $x = 2$ et $x = 3$ [Le maximum et le minimum de m, et les valeurs correspondantes de x sont donnés par

$$(p - p'm)^2 + 4(1 - m)(3 + 5m) = 0, \quad x = \frac{p'm - p}{2(1 - m)}.$$

En éliminant m, on obtient l'équation :

$$(p - p')x^2 - 16x - 3p' - 5p = 0,$$

dont les racines doivent être 2 et 3. Par suite, $p = -\frac{6}{5}$, $p' = -\frac{22}{5}$].

31. Maximum de l'expression $az + by + cz$, sous la condition $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. [On peut s'appuyer sur l'identité de Lagrange :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (az + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cz - az)^2,$$

et en déduire $x : y : z = a : b : c$]. (J. N.)

RECTIFICATIONS.

Page 52, ligne 2, au lieu de $+\frac{p}{n-p}$, lire $+\frac{p}{n+p}$. Même page, en remontant, au lieu de $f(n) <$, lire $f(n) >$.

NOTE SUR LA LOGOCYCLIQUE OU STROPHOÏDE,

d'après M. S. GÜNTHER, professeur au lycée d'Ansbach (Bavière).

Préliminaires. Étant donnés un angle droit ZAX, et un point O sur le prolongement de XA, à la distance $AO = a$ de A, on mène par O une sécante quelconque qui rencontre AZ au point N. On porte sur OM, dans les deux sens, $NM = Nm = NA$. Le lieu des points M, m est, comme l'on sait, une courbe appelée *logocyclique* ou *strophoïde* Si l'on prend pour axe polaire OX, pour origine O, la définition précédente conduit facilement à l'équation :

$$r = a\,(\sec\theta \pm \operatorname{tang}\theta), \tag{1}$$

ou, en coordonnées rectangulaires, O étant aussi l'origine :

$$y^2 = x\frac{(x-a)^2}{2a-x}. \tag{2}$$

De la définition, ou encore des équations (1), (2), on déduit facilement les propriétés suivantes : 1° L'axe OX est un axe de symétrie, l'axe OY une tangente au sommet O de la courbe. 2° Le point A est un point double où les deux branches se coupent à angle droit. 3° La droite BC, symétrique de OY, par rapport à A est une asymptote. 4° La courbe est située toute entière entre OY et l'asymptote : elle a une boucle entre O et A, deux branches infinies au delà de A. 5° La boucle et les branches infinies sont des lignes *inverses* l'une de l'autre ; autrement dit, la logocyclique est une courbe *anallagmatique ;* en effet, $OM \times Om = \overline{OA}^2$.

Si l'origine est placée au point double, on a, pour équation de la logocyclique, en coordonnées polaires R et Θ,

$$R = a\frac{\cos 2\Theta}{\cos\Theta}, \tag{3}$$

et, en coordonnées rectangulaires ($X = a - x$, $Y = y$) :

$$Y = X\sqrt{\frac{a-X}{a+X}}. \tag{4}$$

Voir sur cette courbe : BRIOT et BOUQUET, *Géométrie analytique*, 6e édition, nos 27-29, 335-336 ; FALISSE, *Géométrie analytique*, 2e édition, p. 488 ; PAINVIN, *Géométrie analytique*, p. 429 ; MALEYX, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2me série, t. XIII, p. 404-417, 468-480.

J. Booth (1806-1878) a fait une étude spéciale de la logocyclique (*) M. S. Günther

(*) *A Treatise on some new geometrical Methods containing Essays on tangential Coordinates, pedal Coordinates, reciprocal Polars, the Trigonometry of the Parabola, the geometrical Origin of Logarithms, the geometrical Properties of elliptic Integrals, and other kindred Subjects.* Vol. I. By James Booth. London : Longmans, Green, Reader, and Dyer : 1873, p. 292 et suiv. (S. G.)

nous a communiqué une note où les résultats obtenus par le géomètre anglais, sont retrouvés et complétés à l'aide des fonctions hyperboliques (*). En attendant que nous ayons l'occasion de publier, dans la *Mathesis*, un aperçu de la théorie de ces fonctions, nous extrayons, de l'article de M. Günther, quelques paragraphes où n'interviennent que les fonctions trigonométriques. (P. M.)

Tangente. On déduit, de l'équation en r et θ :

$$dr = ad\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \pm \frac{1}{\cos^2\theta}\right) = \pm\frac{rd\theta}{\cos\theta}.$$

Par suite, on trouve pour l'angle ψ de la tangente à la courbe, en un point M, avec le rayon vecteur OM,

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{rd\theta}{dr} = \pm\cos\theta.$$

La soustangente polaire est donc égale à $\pm r\cos\theta$ ou ***à l'abcisse x du point considéré***, ce qui conduit à une construction assez simple de la tangente (**).

Aire. L'aire $\frac{1}{2}S$ de la demi-boucle supérieure résulte de la formule :

$$\tfrac{1}{2}S = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^2 d\theta = \tfrac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sec\theta - \operatorname{tang}\theta)^2 d\theta =$$

$$\tfrac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{2}{\cos^2\theta} - \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} - 1\right)d\theta = \tfrac{1}{2}a^2\Big[2\operatorname{tang}\theta - 2\sec\theta - \theta\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi},$$

d'où, après quelques réductions :

$$S = 2\,(a^2 - \tfrac{1}{4}\pi a^2).$$

Donc, « ***l'aire de la boucle entière de la logocyclique est le double de la différence entre le carré ayant pour côté, et le cercle ayant pour diamètre, la droite qui joint le point double au sommet.*** »

On arrive encore facilement à ce résultat en partant des équations (2), (3) ou (4).

(*) Sur ces fonctions, voir l'ouvrage de M. Günther : *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen, theilweise auf Grund freier Bearbeitung von Laisant's* « Essai sur les fonctions hyperboliques » *und Forti's* « Tavole logaritmiche » *dargestellt* von SIEGMUND GÜNTHER. Halle a. S., 1881.

(**) Pour une autre construction de la tangente, due à M. G. de Longchamps, voir *Nouvelle Correspondance Mathématique*, t. V, p. 147.

Longueur d'un arc. On a, en ne considérant que l'une des deux branches :

$$s = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2} = \int r d\theta \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} + 1} =$$

$$a \int \frac{\sqrt{1 + \cos^2\theta}}{\cos^2\theta}\, d\vartheta + a \int \frac{\sqrt{1 + \cos^2\theta}\sin\theta\, d\theta}{\cos^2\theta}.$$

La dernière intégrale est facile à trouver au moyen des fonctions élémentaires. Mais la fonction sous le signe intégral étant impaire, cette intégrale est nulle, si les limites sont $-\theta$ et $+\theta$. Dans cette hypothèse,

$$s = a\int_{-\theta}^{+\theta} \frac{\sqrt{1 + \cos^2\theta}\, d\theta}{\cos^2\theta} = 2a\int_0^{\theta} \frac{\sqrt{1 + \cos^2\theta}\, d\theta}{\cos^2\theta},$$

ou successivement,

$$s = 2a\int_0^{\theta} \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta\sqrt{1 + \cos^2\theta}}\, d\vartheta =$$

$$2a\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{1 + \cos^2\theta}} + 2a\int_0^{\theta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 + \cos^2\theta}} = 2\mathrm{H} + 2\mathrm{L},$$

si l'on pose

$$\mathrm{H} = a\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{1 + \cos^2\theta}}, \quad \mathrm{L} = a\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2\theta}}.$$

L'intégrale H représente un arc s' de l'hyperbole $x^2 - y^2 = a^2$, compris entre le point A et un point μ tel que $\sin\theta = \sqrt{2}\sin\omega$, ω étant l'angle μOA (*). En effet, soit

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{tang} 0.$$

Il vient, après quelques calculs très simples,

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1 + \cos^2\theta}}{\cos\theta}, \quad ds' = a\frac{d\vartheta}{\cos^2\theta\sqrt{1 + \cos^2\theta}}, \quad s' = \mathrm{H},$$

$$\sin\omega = \sin\mu\mathrm{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta.$$

(*) Booth, *Researches on the Geometrical Properties of Elliptic Integrals.* Philosophical Transactions, 1852, p. 373. (S. G.)

De même, l'intégrale L représente un arc s'', *compris dans le même angle* μOA, et appartenant à la lemniscate de même axe transverse et de même centre que l'hyperbole H. En effet, cette lemniscate a pour équation, en coordonnées polaires, $r^2 = a^2 \cos 2\omega$. (Voir, par exemple, BRIOT et BOUQUET, *Géom. an.*, nos 339, 395). Si l'on fait $\sqrt{2} \sin \omega = \sin \theta$, on obtient :

$$\cos 2\omega = \cos^2 \theta, \quad r = a \cos \theta, \quad s'' = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} = L.$$

Ainsi, *l'arc de logocyclique compris entre deux rayons vecteurs* OM, OM' *fesant avec* OX *des angles* θ *et* $-\theta$, *est égal à la somme des arcs de l'hyperbole équilatère et de la lemniscate ayant pour demi-axe transverse la distance du sommet de la courbe à son point double, ces arcs étant compris entre deux rayons* $O\mu$, $O\mu'$ *fesant avec* OX *des angles* ω, $-\omega$, *définis par la relation* $\sqrt{2} \sin \omega = \sin \theta$.

En intégrant par parties l'expression de s, on trouve encore :

$$s = 4L + 2T - 2E,$$

ou

$$T = a \operatorname{tang} \theta \sqrt{1 \cos^2 \theta}, \quad E = a \int_0^\theta \sqrt{1 + \cos^2 \theta} d\theta.$$

Géométriquement, T est égale à la tangente μT à l'hyperbole H comptée depuis le point de contact μ, jusqu'au pied T de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette tangente ; E est un arc de l'ellipse représentée par $2x^2 + y^2 = 2a^2$, ou par les relations :

$$x = a \cos \theta, \quad y = \sqrt{2}\, a \sin \theta.$$

En éliminant L entre la première et la seconde expression trouvée pour s, on arrive à cette autre formule :

$$s = 4H - 2T + 2E.$$

L'arc de logocyclique peut donc s'exprimer aussi au moyen d'un arc d'ellipse et d'un arc de lemniscate, ou d'un arc d'ellipse et d'un arc d'hyperbole (**).

(**) Booth a donné le nom de logocyclique à la strophoïde parce que l'aire de cette courbe dépend de celle du *cercle*, sa longueur de celle de l'hyperbole, courbe dont la théorie est liée à celle des *logarithmes*. (S. G.)

PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE CONIQUE A CENTRE,

par M. BARBARIN, professeur au lycée de Toulon (Var).

1. Soit

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'une conique à centre, rapportée à deux axes rectangulaires.

Par un point $M(x, y)$, considéré comme fixe, menons une sécante quelconque, faisant avec l'axe des abscisses l'angle α. Les coordonnées des points A, B où cette droite rencontre la courbe, étant de la forme $x + \rho\cos\alpha$, $y + \rho\sin\alpha$, les valeurs de ρ, égales aux segments MA, MB, résultent de l'équation

$$f(x + \rho\cos\alpha, \quad y + \rho\sin\alpha) = 0.$$

On conclut, de là,

$$MA.MB = \frac{f(x, y)}{A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha}. \qquad (2)$$

Nous donnerons au produit MA.MB le nom de ***puissance du point*** M ***par rapport à la conique***, et nous le désignerons par P_α. Ce produit est indépendant de la direction de la sécante, si la conique est une circonférence de cercle ($A = C$, $B = 0$). Dans le cas général, P_α varie avec α.

2. Soient (x_1, y_1) les coordonnées du centre C de la conique, DCD' le diamètre parallèle à MA. D'après l'équation (2),

$$CD.CD' = -\overline{CD}^2 = \frac{f(x_1, y_1)}{A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha};$$

par conséquent

$$\frac{P_\alpha}{\overline{CD}^2} = -\frac{f(x, y)}{f(x_1, y_1)}. \qquad (3)$$

Donc ***la puissance est proportionnelle au carré du diamètre parallèle à la sécante***. Si la conique (1) est une ellipse dont les axes sont $2a$, $2b$, la puissance varie continuement entre

$$-\frac{f(x, y)}{f(x_1, y_1)}a^2 \quad \text{et} \quad -\frac{f(x, y)}{f(x_1, y_1)}b^2.$$

Si la conique (1) est une hyperbole, la puissance passe par toutes les valeurs non comprises entre

$$-\frac{f(x, y)}{f(x_1, y_1)}a^2 \quad \text{et} \quad \frac{f(x, y)}{f(x_1, y_1)}b^2.$$

Pour une direction donnée de la sécante, les points qui ont même puissance par rapport à la conique (1) sont situés sur une conique homothétique et concentrique. En effet, on a, pour ces points,

$$f(x, y) = -\frac{P_\alpha}{CD^2}f(x_1, y_1) = \text{constante.}$$

3. Considérons maintenant deux coniques représentées par les équations

$$f(x, y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = A'x^2 + C'y^2 - 1 = 0.$$

Si les puissances d'un point M, estimées sur une même sécante, sont égales entre elles, on doit avoir :

$$\frac{f(x, y)}{A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha} = \frac{\varphi(x, y)}{A'\cos^2\alpha + C'\sin^2\alpha}. \qquad (4)$$

Donc *pour une direction donnée de sécantes, le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux coniques à centre est une conique passant par les points communs aux deux premières.*

4. Pour que la solution (4), ait lieu, quelque soit α, on doit poser :

$$B = 0, \quad \frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$$

c'est-à-dire les coniques doivent être homothétiques. Dans ces conditions l'équation (4) se réduit à

$$\frac{f(x, y)}{A} = \frac{\varphi(x, y)}{A'}, \quad \text{ou} \quad 2Dx + 2Ey + F + \frac{A}{A'} = 0.$$

De là, le théorème suivant : *La corde commune à deux coniques est le lieu géométrique des points ayant même puissance par rapport aux deux coniques, quelle que soit la direction de la sécante.*

Par analogie, nous appellerons cette droite *axe radical* de deux coniques homothétiques. On démontre facilement que *les axes radicaux de trois coniques homothétiques, considérées deux à deux, concourent en un même point* (centre radical).

5. D'après la relation (3), chaque théorème relatif au carré du diamètre DD' donne naissance à un théorème correspondant sur la puissance $P_\alpha = MA.MB$.

Ainsi : 1° *La somme des puissances d'un point fixe* M, *estimées sur deux sécantes parallèles à deux diamètres conjugués quelconques, est constante ;* 2° *la somme des inverses des puissances, estimées sur deux sécantes rectangulaires, est constante ;* 3° *les puissances d'un point* M, *estimées sur deux sécantes qui sont également inclinées sur un axe de la conique, sont égales entre elles.*

6. Les notions qui précèdent, s'étendent, sans difficulté, aux surfaces du second degré, à centre unique.

NOTE. — Le théorème du n° 2 résulte immédiatement du suivant, dû à Newton : *Si, par un point quelconque* M *pris dans le plan d'une conique, on mène deux sécantes parallèles à deux droites fixes, et rencontrant la courbe aux points* (A, B), (A', B'), *le rapport* MA.MB : MA'.M' B' *est indépendant du point* M.

Le rapport $P_\alpha : CD^2$, qui est susceptible de nombreuses significations géométriques, a reçu le nom *d'indice du point* M *par rapport à la conique.* Pour la théorie des indices, on peut consulter, soit les développements donnés par M. Faure dans les *Nouvelles Annales,* années 1872 et 1876, soit un travail que nous avons publié dans le même journal, année 1870.

C'est Abel Transon qui, le premier, proposa aux géomètres d'examiner la signification géométrique du premier membre de l'équation d'une conique (*Nouvelles Annales,* année 1864, p. 458 et année 1865, p. 334). (J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

×**6**. *Théorèmes sur les nombres.* Notre démonstration de la question 25 (*Mathesis,* p. 73) ne diffère pas essentiellement de celle de M. Catalan, qui a paru dans les « *Atti dell'Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.* » Elle ne donne que les décompositions de 3^n en trois carrés dont deux sont égaux. Les formules de M. Realis sont plus générales. Des décompositions des puissances paires de 3 en trois carrés inégaux résultent aussi des identités

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2,$$
$$(2a^2 + b^2)^2 = (2a^2)^2 + (2ab)^2 + (b^2)^2.$$

(*) Ce n'est que depuis la publication du numéro de mai de la *Mathesis* que nous avons eu connaissance des « *Extraits de trois lettres adressées par M. Catalan au Prince Boncompagni* » extraits qui ont paru dans les *Atti* (Séances des 17 janvier et 20 février 1881).

Voici d'autres théorèmes du même genre, dus également à M. Catalan.

1° *Si* $a \pm b = \text{M.3}$, $a^2 + b^2$ *est la somme des trois carrés* (*). En effet, $a^2 + (a - 3c)^2 = a^2 + (3c - a)^2 = (a - c)^2 + (a - 2c)^2 + (2c)^2$.

2° *Si* $a \pm b = \text{M.3}$, $a^{2m} + b^{2m}$ *est la somme de trois carrés.* Car, l'égalité $a \pm b = \text{M.3}$, entraine $a^m \pm b^m = \text{M.3}$.

3° Plus généralement, *si* $a \pm b = (x + y)q$ et $2xy$ *un carré parfait* z^2, $a^2 + b^2$ *est la somme de trois carrés.* En effet,

$$a^2 + b^2 = (a - qx)^2 + (a - qy)^2 + (qz)^2 \text{ (**)}.$$

Notre savant collègue a été conduit à ces propositions en cherchant à généraliser le théorème suivant qui se trouve énoncé, dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*, sous le nom de *E. Delacuvellerie*, élève au collège d'Ath : *p étant un nombre premier, supérieur à* 3, $4p^2 + 1$ *est la somme de trois carrés.* Cette propriété résulte de l'identité :

$$4(6n \pm 1)^2 + 1 = (8n \pm 2)^2 + (8n \pm 1)^2 + (4n)^2. \quad \text{(J. N.)}$$

×7. *Sur les carrés des nombres entiers.* Le théorème d'Arithmétique qui nous a été communiqué par M. Doneux (*Mathesis*, p. 63), se trouve déjà énoncé dans une note de l'*Essai sur la théorie des nombres*, de Legendre. Il est équivalent au théorème suivant que nous extrayons du *Traité d'Arithmétique* de Serret (6me édition, p. 283) : *Un nombre entier ne peut être un carré parfait, si, le chiffre des unités étant* 6, *le chiffre des dizaines est pair ; ou si, le chiffre des unités étant* 1, 4, 9, *le chiffre des dizaines est impair.* M. Gerondal (***), professeur au collège communal de Dinant, a déduit, de cette proposition, la conséquence que voici : *Toute somme de deux carrés a un nombre pair de dizaines, si elle est terminée par* 1, 5, 9, *et un nombre impair de dizaines, si elle est terminée par* 3 *ou* 7. (*Progrès*, année 1875, n° 21.). Notre honorable collègue nous signale aussi la propriété suivante qui est peut-être nouvelle : *Lorsqu'un carré est terminé par* 1 *ou* 9, *la moitié du nombre de ses dizaines est de même parité que le nombre des centaines.* Cette pro-

---

(*) Toutefois, il faut excepter le cas de $a = 2b = 2c$.

(**) On peut encore écrire $a \pm b = (u^2 + 2v^2)q$,

$$a^2 + b^2 = (a - qu^2)^2 + (a - 2qv^2)^2 + (2quv)^2.$$

Le théorème de M. Delacuvellerie a été signalé par M. Proth (Nouvelle Correspondance mathématique, t. III, p. 399).

(***) Dans les solutions de la question d'examen n° 3 (*Mathesis*, p. 16), il manque le nombre $2^2.3.7$. (Rectification communiquée par M. Gerondal.)

priété se vérifie pour les carrés des nombres inférieurs à 100, et on l'étend aux autres carrés en observant que les nombres des centaines des carrés de $100n + a$ et de a sont de même parité. (J. N.)

8. *Équation d'un angle.* La courbe représentée par l'équation :

$$y = a\sqrt[2m-1]{x^{2m}},$$

où m est un nombre entier, est symétrique par rapport à l'axe des y, et tangente à l'axe des x à l'origine des coordonnées. Si m croit indéfiniment, cette courbe tend de plus en plus à se confondre avec l'angle formé, du côté des y positifs, par les droites ayant respectivement pour équations $y = ax$, $y = -ax$. On peut donc dire, en un certain sens, que

$$y = \lim \left[a\sqrt[2m-1]{x^{2m}} \right]_{m=\infty}$$

est l'équation de cet angle. (Remarque communiquée par M. J. PLATEAU.)

Équation d'un rectangle. Considérons le lieu de l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1.$$

En écrivant

$$y = \pm b\sqrt[2m]{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2m}},$$

on voit que si l'on attribue à x une valeur constante comprise entre $-a$ et $+a$, et que l'on fasse ensuite croître indéfiniment m, l'ordonnée y tend de plus en plus à devenir égale à $\pm b$. La résolution de l'équation par rapport à x conduit à un résultat analogue. On peut donc dire, en un certain sens, que l'équation proposée, pour une valeur infinie de m, représente le rectangle formé par les droites qui ont pour équation $x = \pm a$, $y = \pm b$. (J. N.)

Équation d'un losange. De même, l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2m}{2m+1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2m}{2m+1}} = 1,$$

pour $m = \infty$, représente le losange dont les côtés ont pour équations

$$\pm\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1. \qquad \text{(J. N.)}$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 4.

Dans un quadrilatère ABCD, *le point d'intersection* M *des diagonales, le point d'intersection m' des droites qui joignent les milieux des côtés opposés et le centre de gravité* G *sont en ligne droite, et l'on a* $Mm = 3mG$.

(STOLL.)

Solution de M. H. VAN AUBEL, *professeur à l'Athénée d'Anvers.* Soient C', A' les centres de gravité des triangles ABD, CBD ; E, F, I, H les milieux des côtés AB, BC, CD, DA ; m' le point d'intersection des droites AC', CA'. On sait que le centre de gravité G du quadrilatère ABCD divise la droite C'A' en deux parties inversement proportionnelles aux surfaces des triangles ABD, CBD ; et comme ces triangles, qui ont même base BD, sont entre eux comme les droites AM, MC, on a :

$$\frac{C'G}{GA'} = \frac{MC}{AM}.$$

Donc les points M, G, qui divisent les droites AC, A'C' en parties proportionnelles sont en ligne droite avec le point m', et, à cause de $A'C' = \frac{4}{3}AC$, on a $m'G = \frac{1}{3}Mm'$.

Si l'on multiplie, membre à membre, les égalités $DC' = 2EC'$, $2IC = DC$, $Em = Im$, on obtient :

$$DC'.IC.Em = EC'.Im.DC ;$$

donc, en vertu de la réciproque du théorème de Ménélaüs, les trois points C', m, C sont en ligne droite. Il en est de même des trois points, A', m, A. D'où il suit que les points m et m' coïncident : ce qui achève la démonstration.

Solution de M. E. VAN AUBEL, *élève à l'Athénée de Liége*, et A. DONEUX, *élève du Collège communal d'Ostende.* Soient A', B', C', D' les centres de gravité des triangles BCD, ACD, ABD, ABC. Les deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D' sont homothétiques, comme ayant leurs côtés parallèles et dans le rapport constant 3 : 1. En effet E, F, I, H étant les milieux de AB, BC, CD, DA, les triangles EC'D', EDC, par exemple, sont semblables. Le centre d'homothétie est en m ; car, dans les trapèzes DC'D'C, ABA'B', les diagonales se coupent sur la médiane EI. On sait

que le centre de gravité du quadrilatère ABCD est à l'intersection des droites A'C', B'D'; donc M et G sont des points homologues des deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D', ce qui démontre le théorème proposé.

Solution par M. P. Ruex. Soient a, b, c, d des forces proportionnelles aux aires des triangles BCD, CDA, DAB, ABC; f leur somme $a + b + c + d$. La résultante de trois forces a, appliquées aux sommets de BCD, et de trois forces c, appliquées aux sommets de BAD, est $3a + 3c$ et passe par G. De même, la résultante de trois forces b, appliquées aux sommets de ACD et de trois forces d, appliquées aux sommets de ABC, est $3b + 3d$, et passe par G. Donc la résultante de la force $b + c + d = f - a$ appliquée en A, de la force $a + c + d = f - b$ appliquée en B, de la force $a + b + d = f - c$, appliquée en C, et de la force $a + b + c = f - d$ appliquée en d, est égale à $3f$ et est appliquée en G.

Soient encore, en A, une force a; en B, une force b; en C, une force c; en D, une force d. La résultante des nouvelles forces a et c est en M, la résultante des nouvelles forces b et d, également. La résultante des quatre nouvelles forces est donc égale à f et elle est appliquée en M.

La résultante des seize forces considérées, ou des forces f appliquées en chaque sommet du quadrilatère, est évidemment au milieu m de la diagonale EI du parallélogramme EFIH, et est égale à $4f$; d'autre part, ces seize forces se ramènent à une force $3f$ en G, une force f en m. Donc M, G, m sont en ligne droite, et $MG = 3Gm$.

Note. — Autrement encore : Sur CA, prenons $C\alpha = AM$, sur DB, $D\beta = BM$. Les trois forces c appliquées en B, C, D, les trois forces a appliquées en A, C, D peuvent être remplacées par trois forces égales à $a + c$ appliquées en M, α, β (Poncelet). Le centre de gravité de $M\alpha\beta$ coïncide donc avec celui du quadrilatère. Soient MG_g, αG_h, βG_h les médianes de ce triangle. Le milieu de h_h est précisément m, comme on le voit aisément, et, évidemment, $Mm = 3mG$. (Remarque communiquée par M. Mister, et aussi, sous une forme un peu différente, par M. S. B. de Reims.)

×Question 10.

Soient : AA', BB', CC' *les hauteurs d'un triangle quelconque* ABC; ($A\alpha_1$, $B'\beta_1$, $C'\gamma_1$), ($A'\alpha_2$, $B\beta_2$, $C'\gamma_2$), ($A'\alpha_3$, $B'\beta_3$, $C\gamma_3$) *les hauteurs des triangles* AB'C', A'BC', A'B'C; H, A'', B'', C'' *les points de concours*

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF

des hauteurs des quatre triangles. Démontrer : 1° *Que les droites* A'A'', B'B'', C'C'' *passent par un même point* ω, *qui est leur milieu commun;* 2° *que* ω *est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit à* ABC *au point de concours des hauteurs du triangle* A'B'C'; 3° *que* ω *est le centre d'une circonférence passant par les six points* β_1, γ_1, γ_2, α_2, α_3, β_3; 4° *que le centre de similitude du triangle* ABC *et du triangle formé par les droites* $\beta_1\gamma_1$, $\gamma_2\alpha_2$, $\alpha_3\beta_3$, *suffisamment prolongées, coïncide avec le centre des médianes anti-parallèles de ces triangles.* (J. NEUBERG).

1° Les droites C'A'', A'C'' étant égales et parallèles à HB', et les droites A'B'', B'A'' égales et parallèles à HC', il s'ensuit que les droites A'A'', B'B'', C'C'' se partagent mutuellement en deux parties égales au point ω, qui est un centre de symétrie des triangles A'B'C', A''B''C''.

2° Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Le quadrilatère $A\beta_1A''\gamma_1$ étant inscriptible, on a :

$$\text{angle } A''A\beta_1 = A''\gamma_1\beta_1 = CAA' = OAB\ (*);$$

donc les trois points A, A'', O sont en ligne droite. Il en est de même de B, B'', O et de C, C'', O. Par conséquent, O est le point de concours des hauteurs du triangle A''B''C''. Or, les deux triangles A'B'C', A''B''C'' ont leurs sommets symétriques par rapport à ω; donc les points de concours de leurs hauteurs sont aussi symétriques par rapport à ce point.

3° La droite $\alpha_3\alpha_2$ étant parallèle à B'C', le quadrilatère $\gamma_1\beta_1\alpha_2\alpha_3$ est inscriptible; il en est de même de $\alpha_2\gamma_2\beta_3\beta_1$ et de $\beta_3\alpha_3\gamma_1\gamma_2$. Comme d'ailleurs, les perpendiculaires élevées aux milieux de $\alpha_3\gamma_1$, $\beta_1\alpha_2$, $\gamma_2\beta_3$ concourent au milieu commun ω des droites A'A'', B'B'', C'C'', ce point ω est le centre d'une circonférence passant par les six points γ_1, β_1, α_2, γ_2, β_3, α_3 (**).

(*) Les droites $\gamma_1\beta_1$, CB sont parallèles, comme étant anti-parallèles à une même droite B'C', par rapport à l'angle CAB.

(**) Pour d'autres propriétés de cette circonférence, voir CATALAN, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, 6e édition, p. 133.

On peut encore énoncer les théorèmes suivants : 1° *Les droites* $\alpha_2\alpha_3$, $\beta_3\beta_1$, $\gamma_1\gamma_2$ *se coupent, deux à deux, aux milieux des côtés du triangle* A'B'C', *et sont égales au demi-périmètre de ce triangle;* 2° *le point* ω *coïncide avec le centre du cercle inscrit au triangle dont les sommets sont aux milieux des côtés du triangle* A'B'C'. Voir *Nouvelle Correspondance*, t. VI, p. 183 et t. II, p. 218. (J. N.)

4° Soient a, b, c les sommets du triangle formé par les droites $\beta_1\gamma_1$, $\gamma_2\alpha_2$, $\alpha_3\beta_3$. Dans le parallélogramme $A\alpha_2a\alpha_3$, Aa passe par le milieu de $\alpha_3\alpha_2$, et par conséquent aussi par le milieu de B'C', qui est parallèle à $\alpha_3\alpha_2$. Or B'C' est anti-parallèle à BC par rapport à l'angle CAB ; donc Aa est une des médianes anti-parallèles du triangle ABC. De même Bb, Cc sont les deux autres. Les lignes Aa, Bb, Cc, étant *homologues* dans les deux triangles ABC, *abc*, sont aussi les médianes anti-parallèles du triangle *abc*(*). H. Van Aubel.

×Question 14.

Construire un quadrilatère, connaissant les côtés et la somme de deux angles opposés.

Soient : ABCD le quadrilatère demandé ; a, b, c, d les longueurs des côtés AB, BC, CD, DA et α la somme des angles A et C. Faisons l'angle $BAE = \alpha$, et prenons sur AE une longueur AE telle que

$$\frac{DC}{CB} = \frac{DA}{AE}, \quad \text{ou} \quad \frac{c}{b} = \frac{d}{AE}.$$

Les triangles DAE, DCB seront semblables, et par conséquent

$$\frac{DE}{DB} = \frac{DA}{DC}, \quad \text{ou} \quad \frac{DE}{DB} = \frac{d}{c}.$$

Donc, si l'on construit d'abord le triangle BAE, dont on connaît deux côtés $AB = a$, $AE = \frac{bd}{c}$ et l'angle compris $BAE = \alpha$, le sommet D se trouvera sur deux circonférences, dont l'une a pour centre le point A et un rayon égal à d, et dont l'autre est le lieu géométrique des points dont les distances aux points E et B sont dans le rapport $\frac{d}{c}$.

Remarque. La solution sera encore la même, si au lieu de la somme, on connaît la différence des angles A et C. H. Van Aubel.

(*) Nous rappelons au lecteur que les médianes antiparallèles d'un triangle sont les droites symétriques des médianes par rapport aux bissectrices. Voir *Mathesis*, p. 14, les propriétés de leur point de concours.

*Question 19.

Le polynôme

$$(x+y)^m - x^m - y^m - 3(x+y)(xy)^{\frac{m-1}{2}} \qquad (1)$$

est divisible par

$$x^2 + xy + y^2,$$

si m *est un multiple impair de* 3. (CAUCHY.

Le diviseur étant égal à

$$\left(x - y\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x - y\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right),$$

il suffit de démontrer que le polynôme (1) s'annule, quand on fait

$$x = y\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

La substitution donne, après suppression du facteur y^m,

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^m - \left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^m - 1 - 3\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\cdot\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}. \qquad (2)$$

Les expressions $\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ étant respectivement les racines cubiques imaginaires de — 1 et de + 1, et m étant un multiple impair de 3, les deux premiers termes de (2) sont égaux à — 1. Le dernier terme de (2) peut s'écrire :

$$-3\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\cdot\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\cdot\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^{\frac{m-3}{2}},$$

ou simplement

$$3\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^{\frac{m-3}{2}}.$$

Comme, en vertu de l'hypothèse, $\frac{1}{2}(m-3)$ est divisible par 3, ce dernier terme se réduit à 3. Donc l'expression (2) revient à $-1-1-1+3=0$, ce qu'il fallait démontrer.

A. VAN GLABBEKE.
Élève du collége communal d'Ostende.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**41**. Sur les côtés d'un triangle $A_1A_2A_3$, on construit, extérieurement, les carrés $A_2B_1C_1A_3$, $A_3B_2C_2A_1$, $A_1B_3C_3A_2$, ayant pour centres I_1, I_2, I_3, et intérieurement, les carrés $A_2b_1c_1A_3$, $A_3b_2c_2A_1$, $A_1b_3c_3A_2$, ayant pour centres i_1, i_2, i_3. On propose : 1° de démontrer que le milieu de B_2C_3 est le centre commun de deux carrés construits sur A_2A_3 et sur C_2C_3 ; 2° de démontrer que les centres de gravité des deux triangles $B_1B_2C_3$, $C_1B_2C_3$ (ou $b_1b_2c_3$, $c_1b_2c_3$) divisent A_2A_3 en trois parties égales ; 3° de construire le triangle $A_1A_2A_3$, connaissant *a*) les points I_1, I_2, B_3 ; *b*) i_1, I_2, B_3 ; *c*) I_1, I_2, i_3 ; *d*) C_1, B_2, C_3 (*). (H. Van Aubel.)

×**42**. Si P et Q sont deux polygones semblables et semblablement orientés, situés d'une manière quelconque dans un plan, les points qui divisent, dans un même rapport, les droites joignant les sommets homologues sont les sommets d'un nouveau polygone semblable à P et Q. (H. Van Aubel.)

43. Trouver la longueur de la boucle de la logocyclique ou strophoïde.

×**44**. Soient P, Q, R trois plans passant par une même droite, A une courbe fermée tracée dans le plan P, B sa projection sur R, par des droites parallèles à Q, C sa projection sur Q par des droites parallèles à R ; X, Y, Z les volumes de trois cônes ayant pour sommet un point quelconque et pour base les courbes A, B, C. L'un des trois volumes X, Y, Z est égal à la somme des deux autres. (F. Hocevar.)

×**45**. Si l'on choisit un point arbitrairement sur chaque arête d'un tétraèdre, les quatre sphères passant respectivement par chaque sommet et par les points situés sur les trois arêtes adjacentes ont un point commun. (S. Roberts.)

46. Trouver une courbe plane AB telle qu'il existe un rapport constant entre les volumes engendrés par le secteur OAB et par le segment A*ab*B tournant autour de l'axe OX, A*a* et B*b* étant perpendiculaires à OX. (G. Petit-Bois.)

(*) Lorsqu'on donne les points I_1, I_2, I_3, on peut trouver le triangle $A_1A_2A_3$ en remarquant que les milieux des côtés de ce triangle coïncident avec les centres des carrés construits intérieurement sur les côtés du triangle $I_1I_2I_3$. Voir *Nouvelle Correspondance*, t. IV, p. 142.

47. Trouver une courbe plane AB, telle qu'il existe un rapport constant entre le volume engendré par le secteur OAB tournant autour de OX, et la sphère de diamètre O*b*, O étant l'origine des coordonnées, B*b* une perpendiculaire à l'axe OX. (G. PETIT-BOIS.)

48. Trouver, par des formules directes, une infinité de valeurs entières de x, y, z, telles que l'expression

$$2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

se réduise à un carré pair, assigné d'avance.

Exemple. Le carré donné étant 36, on a

$$2(2\cdot 5 + 5\cdot 5 + 5\cdot 2) - (2^2 + 5^2 + 5^2) = 36,$$
$$2(2\cdot 5 + 5\cdot 9 + 9\cdot 2) - (2^2 + 5^2 + 9^2) = 36,$$
$$2(1\ \ 9 + 9\cdot 10 + 10\cdot 1) - (1^2 + 9^2 + 10^2) = 36,$$
$$2(1\cdot 10 + 10\cdot 13 + 13\cdot 1) - (1^2 + 10^2 + 13^2) = 36,$$
$$2(1\cdot 13 + 13\cdot 18 + 18\cdot 1) - (1^2 + 13^2 + 18^2) = 36,$$

etc. (S. REALIS.)

×**49.** Résoudre un triangle rectangle, connaissant les rayons des cercles inscrits dans les deux triangles dans lesquels le triangle cherché est décomposé par la droite menée du sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse. (Concours académique de Bordeaux, 1878.)

×**50.** Étant données deux circonférences O, O′ qui se coupent aux points B, C, on joint un point quelconque A de la première aux extrémités de la corde commune; soient C′, B′ les points où les droites AB, AC rencontrent la seconde circonférence. Démontrer que le centre du cercle circonscrit au triangle AB′C′, le point de concours des hauteurs, le centre de gravité et le centre du cercle des neuf points décrivent des circonférences; la circonférence AB′C′ touche une circonférence fixe; le centre du cercle inscrit au triangle AB′C′ parcourt une conchoïde de cercle. (J. NEUBERG.)

×**51.** Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et sachant que deux angles consécutifs sont égaux entre eux. (DELBOEUF.)

52. Les équations de la forme

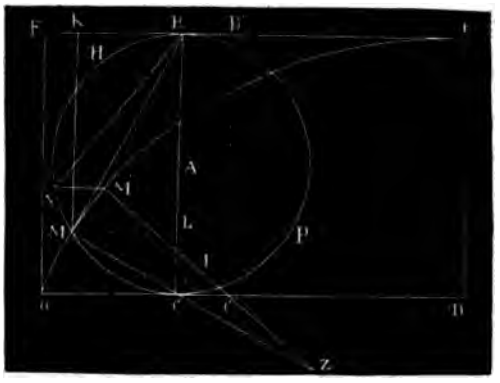
$$x^3 - (\alpha + 2\beta)x^2 + (2\alpha\beta + \beta^2 + 3\gamma^2)x - \alpha(\beta^2 + 3\gamma^2) = 0,$$

où α, β, γ, sont des nombres entiers ou des fractions, sont les seules équations du troisième degré ayant une racine entière ou fractionnaire, qu'on puisse trouver par la règle de Tartaglia (ou de Cardan), en n'opérant que sur des grandeurs commensurables. (E. KUMMER.)

EXERCICE DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE(*),

par M. Ph. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain.

Un point M du cercle CMB qui roule, sans glisser, sur une droite ou *base* OCD, engendre la *cycloïde*. Soient, sur cette base, CO = arc CM, CD = arc MB; DE égale et parallèle au diamètre CB du cercle générateur : O est l'*origine*, E le *sommet* de la cycloïde; ce sont les positions du point M quand le point de contact C occupe les positions O, D.



Prenons sur la base une distance infiniment petite CC'; sur la circonférence, l'arc MN égal à CC'; menons NM' égale et parallèle à CC' : M' est le point de la cycloïde qui répond à la position C' du point de contact, car, pour amener le cercle dans la position correspondante, il suffit évidemment de le faire tourner autour de son centre A de façon que chaque point parcoure un arc égal à CC', puis de lui donner une translation égale et parallèle à CC'. Cette simple remarque conduit aux propriétés suivantes :

I. *Tangente.* Dans le triangle MNM', les côtés MN, M'N ont pour limite de leur rapport l'unité; il en est donc de même des angles en M et en M'. Mais les côtés MN, MM' ont pour limites de leurs directions

(*) Destiné à familiariser les élèves avec les procédés et les ressources de cette géométrie. Nous supposons connues les principales définitions et propriétés relatives aux infiniment petits. Dans la figure, on doit ajouter les cordes MN, MM'.

respectives les tangentes en M au cercle et à la cycloïde; donc *la tangente en* M *à la cycloïde est bissectrice de l'angle qui fait la tangente au cercle roulant avec la perpendiculaire* MP *au diamètre* CB. Elle passe donc par le milieu de l'arc MBP, ou par le point B; donc MC est normale à la courbe.

Par la même raison, si C'B' est parallèle et égale à CB, M'B' sera la tangente en M'. En O et en E, les tangentes OF et EF sont respectivement perpendiculaire et parallèle à OD.

II. *Arc.* L'arc de cycloïde MM' et sa corde ont pour limite de leur rapport l'unité. Le triangle MNM' donne, en négligeant des quantités infiniment petites par rapport à CC',

$$MM' = 2MN \cos NMM' = 2MN \cos NMB = 2(MB - NB) = 2(MB - M'B').$$

Faisant la somme pour tous les arcs infiniment petits compris entre deux points de la courbe, on a rigoureusement

$$lim\ \Sigma MM' = 2\ lim\ \Sigma (MB - M'B').$$

La longueur d'un arc de cycloïde égale deux fois la différence des longueurs des tangentes à ses extrémités, prises depuis le point de contact jusqu'à la tangente au sommet.

Il suit de là 1° *que l'arc* ME *entre un point quelconque et le sommet est double de la tangente* MB; 2° que la longueur de la demi-arcade OME est double du diamètre du cercle générateur.

III. *Aire.* L'aire MBEM'M, entre la cycloïde et les tangentes en M et en E, est la limite de la somme des aires infiniment petites MBB'M'M comprises entre la courbe, deux tangentes infiniment voisines, et la droite BE. Mais on peut négliger les aires telles que MBM'M, dont chacune est moindre qu'un triangle dont la base et la hauteur sont du premier ordre. On a donc

$$surf.\ MBEM'M = lim\ \Sigma\ (surf.\ BM'B') = lim\ \Sigma\ (surf.\ BM'N)$$
$$= lim\ \Sigma\ (surf.\ BMN),$$

car les triangles BM'N, BMN ont même base BN et leurs sommets sur une droite MM' qu'on peut regarder comme parallèle à BN.

Or, $lim\ \Sigma\ (surf.\ BMN)$ n'est autre chose que l'aire MHBM comprise entre la corde MB et la circonférence CMB. Donc *l'aire comprise entre la cycloïde, la tangente au sommet et une tangente quelconque est équivalente*

au segment que cette dernière détache du cercle mobile(*). Par suite, l'aire OMEF, entre la courbe et les tangentes à l'origine et au sommet, égale la moitié de l'aire du cercle ; d'où l'on conclut facilement que l'aire comprise entre la cycloïde et sa base vaut le triple de l'aire du cercle mobile.

IV. *Rayon de courbure.* MC, M'C' soient deux normales infiniment voisines à la cycloïde; leur point de rencontre Z, à la limite, est le centre de courbure en M. Abaissons CI perpendiculaire sur M'C' : CI peut être regardé comme parallèle à MM'. Or, on a

$$CI = CC' \cos C'CI = NM' \cos NM'M ;$$

donc, d'après la propriété établie plus haut (I),

$$CI = \tfrac{1}{2} MM', \quad \text{d'où} \quad CZ = \tfrac{1}{2} MZ.$$

Le rayon de courbure de la cycloïde est double de la normale MC. De là on tire toutes les conséquences bien connues.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE ET GÉNÉRALISATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE M. BERGER.

I. Le 23 avril 1880, M. Alexandre Berger a présenté à la Société des Sciences d'Upsal un mémoire *Sur quelques applications de la fonction gamma à la théorie des nombres.* M. Catalan a extrait de ce mémoire quelques propositions, qu'il a fait connaître aux lecteurs de la *Nouvelle Correspondance Mathématique*, dans la livraison de décembre 1880, sous le titre de *Théorèmes extraordinaires.* Voici quelques-uns de ces théorèmes :

1° La somme des diviseurs d'un nombre entier n est, en moyenne $\frac{1}{6} n\pi^2$.

2° La somme des inverses des diviseurs d'un nombre entier est, en moyenne, $\frac{1}{6} \pi^2$.

3° Si $a, b, c, \ldots$ sont tous les diviseurs d'un nombre entier, la somme

$$\frac{a}{2^a} + \frac{b}{2^b} + \frac{c}{2^c} + \cdots$$

est, en moyenne, égale à 1.

(*) Par suite, si MK est une perpendiculaire à EF, l'aire EKMM'E est égale à l'aire BHNMLB.

Nous ne savons de quelle manière M. Berger s'est servi de la fonction gamma pour trouver ces propositions ; mais nous nous proposons de montrer aux lecteurs de la *Mathesis* une source abondante de propositions analogues. Tel est notre but, et nous y parviendrons au moyen de considérations tout à fait élémentaires.

II. Soient $a, b, c, \ldots$ tous les diviseurs d'un nombre entier n. Soit à chercher la moyenne de la somme :

$$\varphi(n) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots$$

Si l'expression

$$\frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n)}{n}$$

tend vers une limite finie, lorsque n augmente indéfiniment, c'est cette limite que nous nommons valeur moyenne de $\varphi(n)$. Plus généralement, nous appelons valeur moyenne de $\varphi(n)$ une fonction $\psi(n)$ telle, que la différence entre les sommes $\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n)$ et $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n)$ tende vers zéro, lorsque n augmente indéfiniment.

III. Cela posé, dans la somme $\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n)$, $f(p)$ est répété autant de fois qu'il y a de multiples de p, non supérieurs à n. Si q_p est le quotient entier de la division de n par p, $f(p)$ est donc répété q_p fois. Par conséquent

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n) = q_1 f(1) + q_2 f(2) + \cdots + q_n f(n).$$

Si l'on observe que q_p est compris entre $\frac{n}{p} - 1$ et $\frac{n}{p}$, on peut écrire :

$$n\left[f(1) + \frac{1}{2}f(2) + \cdots + \frac{1}{n}f(n)\right] - \left[f(1) + f(2) + \cdots + f(n)\right]$$
$$< \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n) < n\left[f(1) + \frac{1}{2}f(2) + \cdots + \frac{1}{n}f(n)\right].$$

Cette double inégalité suffit pour démontrer et généraliser les propositions de M. Berger, dans tous les cas où l'expression

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{f(1) + \frac{1}{2}f(2) + \cdots + \frac{1}{n}f(n)}$$

tend vers zéro, lorsque n augmente indéfiniment.

Dans d'autres cas, on peut s'aider de cette considération que les nombres a, b, c.... sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres $\frac{n}{a}$, $\frac{n}{b}$, $\frac{n}{c}$,..., ce qui permet d'écrire l'identité :

$$f(a) + f(b) + f(c) + \cdots = f\left(\frac{n}{a}\right) + f\left(\frac{n}{b}\right) + f\left(\frac{n}{c}\right) \cdots$$

IV. Faisant $f(x) = \frac{1}{x^p}$, on obtient :

$$n\left[1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{p+1}}\right] - \left[1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}\right]$$
$$< \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n) < n\left[1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{p+1}}\right],$$

d'où :

$$\lim \frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n)}{n} = 1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \cdots$$

On a donc, en moyenne,

$$\frac{1}{a^p} + \frac{1}{b^p} + \frac{1}{c^p} + \cdots = 1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \cdots$$

En particulier,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \cdots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

On a aussi :

$$a^p + b^p + c^p + \cdots = \left(\frac{n}{a}\right)^p + \left(\frac{n}{b}\right)^p + \left(\frac{n}{c}\right)^p + \cdots$$

Donc, en moyenne,

$$a^p + b^p + c^p + \cdots = n^p\left[1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \cdots\right].$$

En particulier,

$$a + b + c + \cdots = n \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

Enfin, pour $f(x) = \frac{x}{p^x}$, on trouve, en moyenne,

$$\frac{a}{p^a} + \frac{b}{p^b} + \frac{c}{p^c} + \cdots = \frac{1}{p-1}.$$

En particulier,

$$\frac{a}{2^a} + \frac{b}{2^b} + \frac{c}{2^c} + \cdots = 1.$$

V. C'est par ce moyen, ou par des moyens analogues, que l'on peut démontrer les propositions suivantes, et une infinité d'autres du même genre :

1° $a, b, c, \ldots$ étant les diviseurs de n, on a, en moyenne,

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\cdots=1,$$

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\cdots=\frac{3}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{a+p}+\frac{1}{b+p}+\frac{1}{c+p}+\cdots=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}\right).$$

2° $a, b, c, \ldots$ étant encore les diviseurs de n, on a, en moyenne,

$$\frac{1}{a-\frac{1}{2}}+\frac{1}{b-\frac{1}{2}}+\frac{1}{c-\frac{1}{2}}+\cdots=4l2,$$

$$\frac{1}{a+\frac{1}{2}}+\frac{1}{b+\frac{1}{2}}+\frac{1}{c+\frac{1}{2}}+\cdots=4(1-l2).$$

3° Si $f(n)$ est le nombre des diviseurs de n, on a

$$\lim\frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)}{nln}=1,$$

quand n croît indéfiniment.

4° La différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs d'un nombre entier est, en moyenne, égale à $l2$.

5° Si $f(n)$ est la somme des restes du nombre entier n, divisé par tous les nombres entiers qui le précèdent, on a

$$\lim\frac{f(n)}{n^2}=1-\frac{\pi^2}{12},$$

lorsque n croît indéfiniment.

6° La différence entre le nombre des diviseurs de n, et p fois le nombre des diviseurs de n divisibles par p, est égale, en moyenne, au logarithme népérien de p.

E. Cesáro.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Théorie des fractions périodiques.

1. *Génération des fractions périodiques.* Il y a des fractions qui donnent naissance à des fractions périodiques, simples ou mixtes, lorsqu'on veut les réduire en fractions décimales *par le procédé ordinaire.* Exemples :

$$\frac{4}{11} = 0.363636\ldots, \quad \frac{5}{6} = 0.8333\ldots,$$

Mais on peut trouver une fraction périodique dans d'autres cas encore. Ainsi lorsqu'on divise 1 exprimé en unités décimales (1.000 000....) par 1 et que l'on prend 9 pour chaque quotient partiel, on obtient la fraction périodique 0. 999 999.... Un procédé analogue peut donner une fraction périodique mixte, comme le montre l'exemple suivant(*) :

3.000 000...	4
20	0.74999...
40	
40	
40	
40	

$$\frac{3}{4} = 0.74999\ldots$$

A priori, on ne sait pas si l'approximation, en fraction décimale, d'un nombre incommensurable, ne peut pas aussi donner naissance à une fraction décimale périodique. Ainsi, par exemple, rien ne prouve que $\frac{1}{4}\pi$ ou $\frac{1}{3}e$, calculé par division, au moyen d'une valeur de π ou de e, aussi approchée qu'on le veut, ne fournira pas aussi une fraction périodique.

2. *Recherche de la génératrice.* Soit maintenant à chercher la génératrice, *si elle existe*, d'une fraction décimale périodique, de 0. 45 45 45...., par exemple.

Si 0.45 45 45... a une génératrice commensurable $\frac{a}{b}$, on devra avoir :

$$100 \times a = b \times 45 + a, \qquad (1)$$

ou

$$99 \times a = b \times 45, \qquad (2)$$

(*) La plupart des manuels ne parlent pas du tout, ou ne parlent pas suffisamment de ce procédé singulier pour obtenir une fraction périodique mixte.

ou encore

$$\frac{a}{b} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}. \qquad (3)$$

Par suite, cette génératrice, si elle existe, est $\frac{5}{11}$.

Je dis qu'elle existe réellement. En effet, de l'égalité (3), on déduit (2), puis (1), et (1) exprime précisément que a réduit en décimales et divisé par b, donne la fraction périodique 0.45 45 45...

On peut procéder de même dans le cas d'une fraction périodique mixte. Donc *toute fraction périodique a une génératrice commensurable.*

3. *Limite.* Représentons par G, la génératrice commensurable d'une fraction périodique, par P_n, la fraction décimale obtenue, en ne considérant que les n premiers chiffres de la fraction périodique. La différence $G - P_n$ n'est jamais nulle quel que grand que soit n; elle devient aussi petite qu'on le veut, en prenant n suffisamment grand; pour n croissant sans cesse, elle devient de plus en plus petite. On exprime ces trois propriétés en disant que P_n a pour *limite* G.

La fraction décimale P_n ne peut d'ailleurs avoir une autre limite commensurable H(*). Car, soit d'abord H plus grand que G; on aura :

$$H - P_n = (H - G) + (G - P_n).$$

Si n croît indéfiniment, $G - P_n$ tend vers zéro, et $H - P_n$ tend vers $H - G$; donc P_n n'a pas pour limite H. Soit, en second lieu, $G > H$. Puisque la différence entre G et P_n est aussi petite que l'on veut, on peut choisir n assez grand pour que P_n surpasse H. Cela fait, si l'on fait croître n davantage, P_n se rapprochant sans cesse de G, différera de plus en plus de H et n'aura donc pas H pour limite.

D'après ce qu'on a vu au n° 1, une fraction décimale limitée et une fraction décimale périodique, 0.75 et 0.7499.... par exemple, peuvent provenir d'une même fraction ordinaire G. Mais G ne peut donner naissance à deux fractions périodiques distinctes. Soient, en effet, s'il est possible, $P_n > Q_n$, $lim\ P_n = G$, $lim\ Q_n = G$. La limite de Q_n est tout au plus égale à Q_n, plus une unité du $n^{ième}$ ordre décimal, et cela n'arrivera même que dans le cas où tous les chiffres décimaux après le $n^{ième}$ seront des

(*) Ni de limite incommensurable non plus, comme on le reconnaît quand on réfléchit au sens de cette dernière expression.

9 dans la seconde fraction périodique. Mais P_n surpasse Q_n au moins d'une unité du $n^{ième}$ ordre décimal. Donc P_n est égal ou supérieur à la limite de Q_n; par conséquent, la limite de P_n, qui est supérieure à P_n, n'est pas égale à la limite de Q_n, et il est absurde de supposer que G puisse donner naissance à deux fractions périodiques distinctes(*).

4. *Autre mode d'exposition.* On peut encore exposer rigoureusement la théorie des fractions périodiques de la manière suivante(**). 1° Génération des fractions périodiques (n° 1 ci-dessus). 2° Prouver qu'une fraction décimale avec n périodes, $0,45\ 45\ 45 \cdots 45 = p_n$, par exemple, à une limite commensurable. Pour cela, remarquer que $100p_n = 45 + p_n - \varepsilon_n$, ε_n étant une fraction qui décroit indéfiniment, quand n croît indéfiniment. 3° Démontrer que la limite de p_n est vraiment la génératrice de p_n, au moyen des égalités (3), (2), (1). En somme, ce mode d'exposition ne diffère du précédent qu'en ceci : on place le n° 3 avant le n° 2.

5. *Avantages du premier mode d'exposition.* Le premier mode d'exposition (n°s 1, 2, 3) nous semble préférable au second (n° 4, ou 1, 3, 2) pour deux raisons. 1° Il est complétement naturel, car on retrouve la génératrice de la fraction périodique, par le procédé inverse de celui qui a permis de déduire la fraction périodique de la génératrice. 2° La partie élémentaire (n°s 1, 2) peut être enseignée longtemps avant le n° 3, qui, au fond, est beaucoup plus difficile et devrait être réservé, au moins en partie, à des élèves assez avancés, comme tout ce qui suppose explicitement la notion de limite.

On peut objecter que dans les n°s 1 et 2, on recourt déjà à cette notion. Implicitement oui, explicitement non. D'ailleurs, à la rigueur, on peut nier que l'on ait besoin même implicitement de l'idée de limite, dans ces deux n°s, absolument comme on peut ne pas s'inquiéter de la convergence d'une série récurrente pour en trouver la génératrice.

6. *Exposé défectueux de la théorie des fractions périodiques.* Plusieurs traités d'Arithmétique, excellents sous d'autres rapports, donnent, de la

---

(*) Cas particulier d'un théorème sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une variable; ce théorème général est, trop souvent, admis sans démonstration.

(**) Voir, par exemple, le *Traité d'Arithmétique* de M. Faux (Mons, Manceaux), ou celui de M. Serret.

théorie des fractions périodiques, un exposé peu satisfaisant, parce qu'il contient un postulat. L'ordre suivi est celui-ci. 1° Génération d'une fraction périodique p_n, par une fraction G dont le dénominateur contient d'autres facteurs que 2 ou 5. 2° la fraction p_n a pour limite G. 3° *Postulat :* Toute fraction périodique p_n a une génératrice commensurable G. Autrement dit : un nombre incommensurable ne peut donner naissance, par approximation indéfinie, à une fraction périodique. (Ce postulat n'est pas énoncé explicitement). 4° Donc (2°) pour trouver G, il suffit de chercher la limite de p_n (ce qui se fait avec plus ou moins de rigueur suivant les auteurs) et il n'y a pas besoin de démontrer que lim p_n engendre réellement la fraction donnée. (P. M.)

SUR LES FIGURES SEMBLABLES.

Solutions des questions 29 et 42.

1. Soient ABCD..., A'B'C'D'... deux polygones semblables et semblablement orientés. Si l'on fait tourner le premier autour de A jusqu'à ce que le côté AB soit parallèle à A'B', les côtés homologues BC et B'C', CD et C'D',... et, en général, deux lignes homologues quelconques seront également parallèles. Il suit de là, que deux droites homologues des polygones se coupent sous un angle constant λ.

2. Désignons par α, β, γ,... les points d'intersection des côtés homologues AB et A'B', BC et B'C', CD et C'D',... De l'égalité des angles $B\alpha B'$, $B\beta B'$, il résulte que les points B, B', α, β sont sur une même circonférence. Plus généralement, deux droites homologues, menées par B, B' se coupent sur la circonférence $BB'\alpha\beta$. Réciproquement, les droites qui joignent un point quelconque de cette circonférence aux sommets B, B', sont des lignes homologues par rapport aux deux polygones; car elles sont également inclinées sur les côtés AB, A'B'.

3. Les circonférences $BB'\alpha\beta$, $CC'\beta\gamma$ qui ont le point β commun, se coupent en un second point O. Les droites OB et OB', OC et OC' étant homologues, les triangles OBC, OB'C' sont semblables. Le point O est donc son propre homologue, et les triangles OAB et OA'B', OCD et OC'D'... sont également semblables. Toutes les circonférences telles que $A\alpha A'$, $B\alpha\beta B'$, $C\beta\gamma C'$... passent par O.

Ce point remarquable est appelé *centre de similitude* des deux polygones; en faisant tourner l'un des polygones, autour de O, d'un angle égal à λ, on l'amène à être homothétique à l'autre, et O sera le centre d'homothétie.

4. De la similitude des triangles OAB et OA'B', on déduit, immédiatement, celle des triangles OAA' et OBB'. Ainsi, *les triangles qui ont pour bases les droites joignant deux sommets homologues quelconques et pour sommet commun le centre de similitude, sont semblables entre eux.*

Remarquons aussi que les angles OAA', OBB', OCC'.., sont égaux entre eux.

5. La réciproque de la proposition qui précède est vraie et se démontre facilement : *Si, sur les droites qui joignent un point fixe* O *aux sommets d'un polygone* ABCD..., *on construit les triangles semblables et semblablement orientés* OAA', OBB', OCC'.., *les points* A'B'C',... *sont les sommets d'un polygone semblable à* ABCD....

6. Des §§ 4 et 5, on peut conclure la proposition qui fait l'objet de la question 42 : *Les points* A'', B'', C''... *qui divisent, dans un même rapport, les droites joignant les sommets homologues de deux polygones semblables* ABCD..., A'B'C'D'... *sont les sommets d'un nouveau polygone semblable aux deux premiers* (H. Van Aubel). En effet, les triangles OAA', OBB', OCC',... étant semblables (§ 4), il en est de même des triangles OAA'', OBB'', OCC'',...; donc (§ 5).... (*).

7. Les développements qui viennent d'être donnés, conduisent au théorème suivant :

Si une figure se déplace d'une manière continue en restant semblable à elle-même, à chaque position de la figure mobile correspond un centre instantané de similitude : les rayons qui joignent ce point aux divers points de la figure ou aux points de contact d'une ligne de la figure avec son

(*) Nous avons cru utile de rappeler, à l'occasion des questions 29 et 42, les notions sur le centre de similitude de deux figures semblables, notions qui nous paraissent être moins connues qu'elles ne le méritent Pour des applications et des renseignements historiques, on peut voir : CATALAN, *Éléments de Géométrie*, 2e édition, pp. 75 et 76; *Théorèmes et problèmes*, du même auteur, 6e édition, pp. 89 et 90; *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, pp. 65, 72, 219 (J. N.), et p. 321 (Laquière).

enveloppe, font, respectivement, avec les trajectoires de ces points, et l'enveloppe de cette ligne, un angle commun(*).

Si A, B, C sont trois points de la figure mobile, et si KLM est le triangle formé par les tangentes aux trajectoires de ces points, le centre instantané de similitude est à l'intersection des circonférences ABM, BCK, CAL.

8. La première partie de la question 29 se déduit immédiatement du § 7. En effet, considérons une droite *ab* qui se meut en restant tangente à une courbe E, et dont la longueur est définie par deux courbes (*a*) et (*b*) sur lesquelles doivent se trouver les extrémités *a*, *b* de cette droite. Un point *m* qui partage le segment variable *ab* dans un rapport donné, décrit une courbe (*m*). Le système des points *a*, *m*, *b* forme une figure semblalement variable; soit O, le centre instantané de similitude de cette figure. Les tangentes aux trajectoires (*m*) des différents points de *ab* font le même angle avec les rayons O*m*; par conséquent, elles enveloppent une parabole ayant pour foyer le centre O(**). De même, les normales à ces trajectoires enveloppent une seconde parabole etc.

9. On démontre, de la même manière, que les tangentes et les normales aux trajectoires des différents points d'une circonférence qui fait partie d'une figure semblablement variable, enveloppent, respectivement deux ellipses ou deux hyperboles qui ont pour foyer commun le centre instantané de similitude.

NOTE. — M. Jamet nous a envoyé une bonne solution analytique de la question 29; nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de l'insérer.

(J. N.)

(*) Lorsque les polygones ABCD..., A'B'C'D'... sont infiniment voisins, les droites AA', BB', CC',... sont les tangentes aux trajectoires (A), (B), (C),... et l'on a vu (§ 4) que les angles OAA', OBB', OCC',... sont égaux entre eux.

(**) Appelons *podaire correspondant à l'angle V*, le lieu des projections d'un point fixe O sur les tangentes d'une courbe, les projetantes faisant l'angle V avec ces tangentes. Si l'on fait varier l'angle V, la podaire reste toujours semblable à elle-même (§ 5). On conclut, de là, que l'antipodaire correspondant à un angle V, d'un point fixe par rapport à une courbe S, est identique à l'antipodaire correspondant à l'angle $\frac{\pi}{2}$, du même point, par rapport à une certaine courbe semblable à S.

PARTAGE DES POLYGONES(*),

par M. D'OCAGNE, élève de l'École polytechnique de Paris.

Dans les opérations sur le terrain, on a fréquemment à résoudre la question suivante : *Par un point* P, *donné sur le côté* A_1A_n *du polygone* $A_1A_2...A_{n-1}A_n$, *mener une droite qui divise la surface du polygone dans un rapport donné.* Les traités de Géométrie pratique en font connaître une solution approximative, d'un emploi commode pour les arpenteurs, mais qui est absolument dépourvue de rigueur. La question n'avait été, que je sache, traitée au point de vue de la Géométrie pure que dans le cas du triangle ; j'en ai donné une solution générale(**) dont voici le résumé.

Par le sommet A_{n-1}, je mène, à la diagonale A_nA_{n-2}, une parallèle qui coupe le prolongement du côté $A_{n-2}A_{n-3}$ au point B_{n-1} ; par le point B_{n-1}, je mène à la diagonale A_nA_{n-3}, une parallèle qui coupe le prolongement du côté $A_{n-3}A_{n-4}$ au point B_{n-2} ; par le point B_{n-2}, je mène, à la diagonale A_nA_{n-4}, une parallèle qui coupe le prolongement du côté $A_{n-4}A_{n-5}$ au point B_{n-3}, et ainsi de suite. Je finis par obtenir le point B_3 sur le prolongement du côté A_1A_2 ; le triangle $A_1A_nB_3$ sera équivalent au polygone $A_1A_2...A_{n-1}A_n$. Cela posé, je tire la droite PC_1 qui divise ce triangle dans le rapport donné. Si le point C_1 se trouve entre les sommets A_1, A_2, la droite PC_1 résout la question. Si C_1 est sur le prolongement de A_1A_2, je mène par ce point, parallèlement à PA_2, une droite qui coupe A_2A_3 en C_2 ; PC_2 est la droite cherchée, lorsqu'elle est intérieure au polygone. S'il n'en est pas ainsi, je mène C_2C_3 parallèle à A_3A_4, et ainsi de suite, jusqu'à ce que j'obtienne un point C_i placé entre les sommets correspondants A_i et A_{i+1}.

NOTE. — Soit à *diviser un polygone* $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ *en parties proportionnelles à des quantités données, par des droites partant d'un point quelconque* P *pris dans son*

(*) La démonstration indiquée en note, p. 8 de la *Mathesis*, relativement au nombre des intersections intérieures des diagonales d'un polygone, a été donnée par M. d'Ocagne, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 44, avant M. Englert.

(**) *Journal de Mathématiques élémentaires*, de Bourget, t. II, p. 332 et t. IV, p. 487.

intérieur; la première ligne de division PC *aboutit à un point* C, *donné sur le côté* A_nA_1. Voici comment cette question plus générale a été résolue par M Euzet, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1854. p. 114 Après avoir prolongé tous les côtés du polygone dans le sens A_nA_1 et joint P à tous les sommets, menons CB_n parallèle à PA_n, B_nB_{n-1} parallèle à PA_{n-1}, $B_{n-1}B_{n-2}$, parallèle à PA_{n-2}. ., enfin B_2B_1 parallèle à PA_1, les points B_n. B_{n-1}... B_1 se trouvant, respectivement, sur les prolongements des côtés $A_{n-1}A_n$, $A_{n-2}A_{n-1}$..., A_nA_1. Le triangle PCB_1 sera équivalent au polygone $A_1A_2...A_n$. Divisons maintenant CB_1 en parties proportionnelles aux quantités données; soit K_1 l'un des points de division. Si ce point est situé entre C et A_1, la droite PK_1 sera l'une des droites cherchées. Si cela n'a pas lieu, menons K_1K_2 parallèle à PA_2, K_2K_3 parallèle à PA_3, et ainsi de suite, les points K_2, K_3... se trouvant sur les côtés A_1A_2, A_2A_3.... On arrête ces constructions, lorsqu'on est parvenu à un point K_i situé entre les sommets correspondants A_{i-1}, A_i; PK_i sera alors l'une des lignes de division.

On remarque l'analogie de cette solution avec celle de M. d'Ocagne qui, sans doute, n'avait pas connaissance du travail de M. Euzet. (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

1. *Précis d'Arithmétique théorique et pratique*, par F. Schoonjans, professeur aux Écoles normales de Lierre et d'Anvers. Deuxième édition. Lierre, Van In et Cie, 1881. Un vol. in-12 de 320 pages. Prix : 2 francs.

2. *Aanvankelijke lessen in de theoretische Rekenkunde*, door F. Schoonjans, etc. Lierre, Van In en Cie, 1880. Un volume de 352 p. in 8°. Prix : 4 francs.

I. M. Schoonjans a publié, en 1877, un *Précis d'arithmétique théorique* élémentaire et, en 1878, un *Recueil* d'exercices et de problèmes d'arithmétique, qui en était le complément naturel. Ces exercices étaient bien choisis, suffisamment variés et bien gradués; le Précis était rédigé avec clarté et concision; les matières en étaient, en général, bien disposées. Malheureusement, les théories du moindre multiple et du plus grand commun diviseur n'étaient pas rigoureuses; celles de la multiplication et de la division manquaient de simplicité, parce que l'auteur avait pris pour point de départ des définitions trop générales et trop abstraites; enfin, ça et là, il y avait encore d'autres critiques à faire au point de vue de la rigueur ou de la méthode.

Le *Précis d'arithmétique théorique et pratique* que nous annonçons aujourdhui est une nouvelle édition, revue et considérablement augmentée, de ces deux petits livres que l'auteur a eu le bon esprit de fondre en un seul. La révision a été sérieuse et a porté sur l'ensemble et sur les détails. Toutes les parties de l'ancien Précis qui pouvaient prêter le flanc à la critique ont été corrigées, et, le plus souvent, de la manière la plus heureuse. D'un bout à l'autre de l'ouvrage, le lecteur est conduit progressivement des idées les plus simples et les plus familières aux plus complexes et aux plus abstraites. Les définitions et les propositions

générales ne sont exposées qu'après avoir été étudiées dans les divers cas particuliers auxquels elles s'appliquent. Ainsi, par exemple, l'auteur donne successivement trois définitions de la division : l'une pour les nombres entiers, qui correspond à l'idée que l'on se forme ordinairement de cette opération ; une seconde pour les nombres décimaux, qui en est une extension toute naturelle ; enfin la définition générale, à propos des fractions. L'auteur a procédé de même dans toutes les questions et il a eu soin de rendre compte des raisons qui l'ont guidé dans tel ou tel mode d'exposition au moyen de notes spéciales. Ces notes méthodologiques seront surtout précieuses pour les jeunes professeurs de nos écoles moyennes et pour leurs meilleurs élèves.

Les *Lessen in de theoretische Rekenkunde* forment un traité presque complet d'Arithmétique raisonnée, à l'usage des élèves-instituteurs, et il pourrait servir aussi dans les classes d'humanités des collèges belges, si les cours de mathématiques ne se faisaient pas exclusivement en français dans notre pays. L'idée fondamentale qui a présidé à la rédaction de ce traité, est la même que celle que nous signalions plus haut pour le Précis ; mais on trouve de plus, dans les *Lessen*, diverses théories qui n'ont pu être qu'effleurées dans l'ouvrage élémentaire, par exemple, celles du plus grand commun diviseur et du moindre multiple, ou qui même avaient dû en être exclues complètement, comme celle des progressions et des logarithmes (*), et les notions sur les expressions irrationnelles Ces diverses questions sont traitées avec le soin qu'elles méritent, particulièrement toutes celles où il s'agit des nombres incommensurables.

II. Après avoir donné dans les lignes qui précèdent une idée générale de la méthode de M. Schoonjans, nous croyons bien faire de passer en revue quelques points spéciaux.

1. Dans le *Précis*, le théorème sur l'inversion des facteurs dans un produit et les conséquences assez abstraites qui s'en déduisent, précèdent l'exposé des divers cas de la multiplication ; dans les *Lessen*, ils la suivent. Au point de vue de l'enseignement, cette seconde disposition est préférable, car on peut donner la théorie de la multiplication en ne s'appuyant qu'*implicitement* sur ces principes.

2. Dans le *Précis*, les divers cas considérés, pour la division, sont les suivants :

$$31 : 7 ;\quad 65432 : 7 ;\quad 6542 : 700 ;\quad 3745 : 735 ;\quad 654321 : 765.$$

Dans les *Lessen*, nous ne savons pourquoi, l'auteur a laissé de côté le second cas, qui pourtant se présente dans la pratique et est, avec le quatrième, l'introduction naturelle au dernier.

3. La théorie de la division décimale est particulièrement bien exposée. Nous en recommandons la lecture aux professeurs qui doivent enseigner cette théorie sans s'appuyer sur celle des fractions ordinaires.

(*) En revanche, on trouve, dans le *Précis*, des Notions sur la résolution des équations du premier degré, avec des exercices appropriés, comme introduction à l'étude de l'algèbre.

4. L'auteur fait observer avec raison, dans le chapitre consacré au système métrique, que le *mètre* est une mesure absolument conventionnelle, comme la toise, et que les avantages du système viennent uniquement de la subdivision décimale des diverses unités, et de la relation simple qui existe entre l'unité de poids et l'unité de volume.

Il aurait été utile de définir, dans ce chapitre, l'unité des micrographes, le *micron* ou millième de millimètre (*), et de faire cette remarque mnémotechnique que, même les unités de surface et de volume sont subdivisées de 10 en 10 (et non de 100 en 100 ou de 1000 en 1000), quand elles sont exprimées par un seul mot (are, stère)

5. Dans la division de deux nombres complexes de même espèce (121 livres sterlings, 3 pence, 6 deniers, par exemple, par 9 livres sterlings, 4 pence, 4 deniers) on ne réduit pas toujours le diviseur et le dividende en unités de l'espèce la moins élevée.

6. La recherche des nombres premiers par le crible d'Eratosthènes est parfaitement pratique, contrairement à ce qui est dit dans les *Lessen*. Récemment encore, on s'est servi, en Angleterre, du procédé du Géomètre grec pour trouver les nombres premiers de 3000001 à 6000000, concurremment avec un autre procédé tout aussi élémentaire (**).

7. A propos de la théorie des fractions périodiques, M. Schoonjans a bien élucidé la notion de *limite*, mais il aurait dû démontrer que les limites trouvées pour les fractions périodiques en sont vraiment les génératrices.

8 Dans les *Lessen*, M. Schoonjans, comme beaucoup d'autres auteurs, critique l'escompte en dehors en faisant observer que l'escompte, à 5 p. °/₀, d'une somme de 100 francs, payables dans 20 ans, serait égal à 100 francs. Nous avons montré, dans un recueil pédagogique, que cela est inexact. On doit évidemment calculer l'escompte comme l'intérêt, année par année : 100 francs payables dans 20 ans, lorsque l'escompte est de 5 p. °/₀ par an, valent actuellement $100 : (\frac{100}{95})^{20}$ (***).

9. L'auteur montre très bien que la formule de l'intérêt composé $A = a(1 + r)^n$ (a, capital primitif, A capital définitif, r taux, n temps) est vraie que n soit entier ou fractionnaire

10. Dans le *Précis*, il aurait fallu dire un mot des annuités. On établit aisément la règle fondamentale relative aux annuités sans recourir aux progressions, comme il suit : Une annuité a payée pendant n années, le taux de l'intérêt étant r,

---

(*) Le micron est défini incidemment, *Précis*, p. 283, en note.

(*) On a actuellement des tables des nombres premiers et des plus petits facteurs des nombres non premiers de 1 à 9 millions; le 6e million toutefois est seulement en cours de publication. Un Belge calcule le *dixième* million.

(***) Pris à la lettre, toutefois, le texte de M. Schoonjans est irréprochable. Il définit l'escompte « l'intérêt de la somme marquée sur le billet, calculé d'après un certain taux. »

équivaut aux intérêts accumulés d'une somme $(a : r)$, placée pendant n années à intérêts composés. Or cette somme, au bout de ce temps devient $\frac{a(1+r)^n}{r}$: les intérêts accumulés sont $\frac{a(1+r)^n}{r} - \frac{a}{r}$. Donc, etc.

11. Les notions sur les incommensurables sont placées, avec raison, *après* l'exposé des méthodes d'extraction de la racine carrée et de la racine cubique. Évidemment, l'élève comprend mieux le sens de $\sqrt{2}$, quand il connaît les procédés servant à trouver des nombres indéfiniment croissants ou décroissants dont le carré a 2 pour limite.

12. Enfin tout ce qui se rapporte aux logarithmes des nombres non compris dans la progression arithmétique, ou aux nombres des logarithmes non compris dans la progression géométrique qui, avec la progression arithmétique, définit un système logarithmique, est traité d'une manière à la fois simple et rigoureuse.

(P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES (*).

Question 28.

On donne une parabole (P) *et une de ses tangentes* t, *dont le point de contact est* A. *Par les différents points de* t, *on élève des perpendiculaires aux tangentes à* (P) *menées par ces points, autres que* t. *Ces perpendiculaires enveloppent une seconde parabole* (P'). *La parabole* (P') *est tangente à* t *en un point* B. *Les paraboles* (P) *et* (P') *ont le même foyer, leurs axes sont rectangulaires. La directrice de* (P) *passe par le point* B, *la directrice de* (P') *passe par le point* A. (Ed. Dewulf.)

Solution analytique, par M. Brocard. Soient M un point quelconque de t, t' la seconde tangente menée de M à (P), t_1 la perpendiculaire élevée en M à t'. Prenons pour axes de coordonnées l'axe et la tangente au sommet de (P); cette courbe et les tangentes t, t' ont pour équations

$$y^2 = 2px; \quad y = mx + \frac{p}{2m}; \quad y = m'x + \frac{p}{2m'},$$

(*) Nous avons reçu, trop tard pour pouvoir les mentionner dans le précédent numéro : 1° Une bonne solution de la question 19, par M. Pisani professeur à l'Institut technique de Messine (Italie); 2° de bonnes solutions de la question 23, par MM. Van Glabbeke et Fouquet, élèves du collége communal d'Ostende.

et les coordonnées des points A, M ont pour expressions :

$$x = \frac{p}{2m^2}, \quad y = \frac{p}{m}; \quad x = \frac{p}{2mm'}, \quad y = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right).$$

L'équation de t_1 est

$$y - \frac{p}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) = -\frac{1}{m'}\left(x - \frac{p}{2mm'}\right),$$

ou, si l'on ordonne par rapport au paramètre variable $\frac{1}{m'}$,

$$\frac{p}{2m} \cdot \frac{1}{m'^2} - \left(x - \frac{p}{2}\right) \cdot \frac{1}{m'} - \left(y - \frac{p}{2m}\right) = 0.$$

Par suite, l'enveloppe de t_1 est représentée par

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{2p}{m}\left(y - \frac{p}{2m}\right) = 0. \qquad (1)$$

Transportons l'origine au point qui a pour coordonnées :

$$\alpha = \frac{p}{2}, \quad \beta = \frac{p}{2m};$$

l'équation (1) se réduira à

$$x^2 = -\frac{2p}{m} y.$$

On conclut, de là, que l'enveloppe de t_1 est une parabole (P') dont l'axe est perpendiculaire à celui de (P) et passe au foyer F de (P); le paramètre est égal à $\frac{2p}{m}$. L'ordonnée du foyer et celle de la directrice de (P') sont, respectivement, égales à l'ordonnée β du sommet, diminuée ou augmentée du quart du paramètre $\frac{2p}{m}$; par conséquent, ce foyer coïncide avec F, et la directrice passe par A.

En mettant l'équation (1) sous la forme :

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{2p}{m}\left(y - mx - \frac{p}{2m}\right) = 0,$$

on reconnaît que la droite t touche (P') au point B où elle rencontre la directrice de (P).

Solution géométrique, par M. S. B. de Reims. Soient N, N', N_1 les projections de F sur les droites t, t', t_1; on sait que N et N' sont sur la

tangente au sommet de (P). La circonférence décrite sur MF comme diamètre passe par N, N', N_1 ; la droite N' N_1 étant également un diamètre de cette ligne, l'angle N' N N_1 est droit, et, par suite, la droite NN_1, parallèle à l'axe de (P), est fixe. On peut donc dire que l'angle droit FN_1M se meut de manière que son sommet parcourt une droite et que l'un des côtés tourne autour d'un point fixe ; il résulte, de là, que l'enveloppe de t_1 est une parabole (P') ayant pour foyer F et pour tangente au sommet la droite NN_1. La directrice de (P') étant deux fois plus éloignée de F que NN_1, passe par A.

Désignons par B le point où t coupe la directrice de (P), par T la seconde tangente menée de B à (P); les droites t et T sont perpendiculaires. Par conséquent, si t' coïncide avec T, t_1 coïncide avec t; donc (P') touche t. Le point de contact est B. En effet, la tangente AB à (P), comprise entre le point de contact A et la directrice est vue du foyer sous un angle droit ; réciproquement, AB étant une tangente à (P') et le point A étant sur la directrice de (P'), B est le point de contact de (P') et t.

Les deux paraboles (P) et (P') sont conjuguées et dérivent l'une de l'autre d'après la même loi.

Solution géométrique, par M. JAMET. Menons Mx parallèle à l'axe de la parabole (P). On sait que l'angle de MF avec t' est égal à AMx; par suite, l'angle de MF avec t_1 est constant. Soit N_1 la projection de F sur t_1 ; le triangle FMN_1 restant toujours semblable à lui-même, lorsque le point M décrit t, le sommet N_1 décrit une seconde droite (D), parallèle à la droite t après qu'elle a tourné d'un angle égal à MFN_1 ou à AMx. Il en résulte que l'enveloppe de MN_1 est une parabole (P') dont le foyer est en F et dont la tangente au sommet est (D).

Si M est au point où t rencontre la directrice de (P), t_1 coïncidera avec t, qui est, par conséquent, une tangente à (P') en un certain point B.

Si M vient en A, t' se confond avec t, et t_1 sera perpendiculaire à t; donc les tangentes menées de A à (P') sont rectangulaires, et A appartient à la directrice de (P'). En faisant coïncider M avec B, on verrait, de même, que B appartient à la directrice de (P).

NOTE. La réciproque de la première partie de la question 28 admet la généralisation suivante : *Deux paraboles* (P), (P') *ayant le même foyer, si d'un point quelconque d'une tangente commune, on mène deux nouvelles tangentes, ces dernières droites formeront un angle constant, égal à celui des axes des deux courbes.* Comparez CHASLES, *Traité des sections coniques*, §§ 59 et 60. (J. N.)

×Question 31.

Soient : I_1, I_2, I_3, *les centres des cercles ex-inscrits au triangle* ABC ; $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$, $(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$ *les points de contact des côtés*; R, *r les rayons des cercles circonscrit et inscrit à* ABC; S_6 *l'aire de l'hexagone* $\gamma_1\beta_1\alpha_2\gamma_2\beta_3\alpha_3$; S_9 *celle de l'ennéagone* $\gamma_1 I_1\beta_1\alpha_2 I_2\gamma_2\beta_3 I_3\alpha_3$; *enfin,* S_3 *celle du triangle* ABC. *Démontrer les relations :*

$$\frac{S_6 - S_3}{S_3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4Rr}, \quad \frac{S_9}{S_3} = \frac{4R}{r} - \frac{r}{2R}.$$

(Edm. van Aubel.)

1. On a

$$S_6 = A\gamma_1\beta_1 + A\gamma_2\beta_3 + B\alpha_2\gamma_2 + B\alpha_3\gamma_1 + C\beta_3\alpha_3 + C\alpha_2\beta_1 - 2S_3.$$

Mais

$$\frac{A\gamma_1\beta_1}{S_3} = \frac{A\beta_1 \cdot A\gamma_1}{AC \cdot AB} = \frac{p^2}{bc}, \quad \frac{A\gamma_2\beta_3}{S_3} = \frac{A\gamma_2 \cdot A\beta_3}{AB \cdot AC} = \frac{(p-c)(p-b)}{bc};$$

d'où

$$\frac{A\gamma_1\beta_1 + A\gamma_2\beta_3}{S_3} = \frac{2p^2 - p(b+c) + bc}{bc} = \frac{ap}{bc} + 1 ; \text{ etc.}$$

Par conséquent

$$\frac{S_6}{S_3} = p\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) + 3 - 2,$$

ou

$$\frac{S_6 - S_3}{S_3} = \frac{p(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}.$$

Si l'on remarque que

$$S_3 = pr, \qquad 4RS_3 = abc,$$

on peut encore écrire

$$\frac{S_6 - S_3}{S_3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4Rr}.$$

2. Soient r_1, r_2, r_3, les rayons des cercles exinscrits à ABC. On a

$$S_9 = 2AI_1\beta_1 + 2BI_2\gamma_2 + 2CI_3\alpha_3 + A\gamma_2\beta_3 + B\alpha_3\gamma_1 + C\beta_1\alpha_2 - 2S_3.$$

Mais

$$\frac{2AI_1\beta_1}{S_3} = \frac{pr_1}{pr} = \frac{r_1}{r}, \quad \frac{A\gamma_2\beta_3}{S_3} = \frac{(p-c)(p-b)}{bc}; \text{ etc.}$$

Par suite :

$$\frac{S_9}{S_3} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} + \Sigma \frac{(p-c)(p-b}{bc} - 2,$$

ou, si l'on remplace $r_1 + r_2 + r_3$ par $4R + r$,

$$\frac{S_9}{S_3} = \frac{4R}{r} - \left[1 - \Sigma \frac{(p-c)(p-b)}{bc}\right].$$

La quantité entre crochets peut s'écrire :

$$\frac{abc - p^2\Sigma a + 2p\Sigma ab - 3abc}{abc} = \frac{2p}{abc}\left(-p^2 + \Sigma ab - \frac{abc}{p}\right).$$

Pour la simplifier, rappelons-nous que

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = -p^2 + \Sigma ab - \frac{abc}{p}.$$

Donc

$$\frac{S_9}{S_3} = \frac{4R}{r} - \frac{2pr^2}{abc} = \frac{4R}{r} - \frac{2S_3 r}{4S_3 R} = \frac{4R}{r} - \frac{r}{2R}.$$

VAN GLABBEKE,
élève du collége communal d'Ostende.

Autre solution par M. Fouquet, du même collège.

×Question 40.

D'un point P, *pris sur la bissectrice de l'angle* A *d'un triangle* ABC, *on abaisse des perpendiculaires* PA', PB', PC' *sur les côtés. Démontrer que les droites* PA', B'C' *se coupent sur la médiane issue de* A. (E. CESÁRO.)

Nous avons reçu, de ce curieux théorème, plusieurs solutions que nous allons résumer.

Solution de MM. ÉDM. VAN AUBEL, *de Liége,* E. DUYCKAERTS, *élève du collège communal de St. Trond, et* M..., *de Carlsbourg.* Désignons par E, F les points où les droites PA', AP rencontrent, respectivement, B'C', BC. Les triangles C'PE, ABF ayant leurs côtés perpendiculaires, on a

$$C'E : C'P = AF : AB.$$

Pour une raison analogue,

$$B'E : B'P = AF : AC.$$

De ces proportions, on conclut AB.C'E = AC.B'E, ou, en remarquant que C'E et B'E sont proportionnels aux distances de E à AB et AC, aire ABE = aire ACE. Mais les triangles ABE, ACE ont même base AE; donc les hauteurs correspondantes sont égales et, de là, on déduit facilement que AE passe par le milieu de BC.

Solution de M. Pisani, *professeur à Messine, et* H. Brocard. Lorsque le point P se meut sur la bissectrice, le point E décrit une droite passant par A. Plaçons le point P à l'intersection de la bissectrice et de la circonférence circonscrite à ABC; alors les projections de P sur les côtés de ABC sont en ligne droite. L'une de ces projections est au milieu de BC; donc etc.

Autre solution. Soient β, γ les points où une parallèle à BC, par E, rencontre AC et AB. Des quadrilatères inscriptibles PEB'β, PCγ'E, on déduit l'égalité des angles B'Pβ, C'Pγ, et, de là, celle des triangles B'Pβ, C'Pγ, et, enfin, celle des triangles rectangles PEβ, PEγ, etc. (J. N.)

M. Pisani nous a également envoyé une bonne solution analytique du théorème de M. Cesáro.

QUESTIONS PROPOSÉES (*).

53. Un paraboloïde de révolution est tangent aux trois faces d'un trièdre trirectangle. Quelle est la courbe qui, sur chaque face, limite les positions du point de contact. (H. Brocard.)

La question analogue, pour un ellipsoïde quelconque, a été posée depuis longtemps. Elle est restée sans réponse. (J. N.)

54. On donne une parabole fixe et une autre parabole égale, qui se déplace en restant tangente à la première. Les axes des deux courbes étant perpendiculaires l'un à l'autre, on demande l'enveloppe de la corde commune. (H. Brocard.)

×**55.** Si, sur les côtés BC, CA d'un triangle ABC, on construit, *extérieurement*, et sur le troisième côté BA, *intérieurement* les triangles BB'C, CC'A, BA'A semblables à un triangle donné, la figure B'CC'A' est un parallélogramme. (H. Van Aubel.)

×**56.** Si, sur deux côtés opposés AB, CD d'un quadrilatère ABCD, on

---

(*) *Rectification* à la question 41, n° de juin : ligne 6, lire $C_2 B_3$ au lieu de $C_2 C_3$.

construit, *extérieurement*, et sur les deux autres côtés DC, DA, *intérieurement*, les triangles AA'B, CC'D, CB'B. AD'D semblables à un triangle donné, la figure A'B'C'D' sera un parallélogramme. (H. VAN AUBEL.)

Dans les questions 55 et 56, les sommets homologues des triangles semblables sont énoncés dans le même ordre. La question 56 a déjà été signalée, sous une forme un peu différente, par M. W. Woolsey Johnson, dans le *Messenger of Mathematics*, 2e série, tome V, p. 191.

×**57**. Par un point P, pris sur une circonférence, on mène les six droites qui rencontrent, sous un même angle α, les côtés d'un triangle inscrit ABC. Démontrer : 1° que les points de rencontre de ces droites avec les côtés correspondants sont situés sur deux droites D_α et $D_{\pi-\alpha}$; 2° que le lieu des points de rencontre de D_α, $D_{\pi-\alpha}$, lorsque l'angle α varie, est une perpendiculaire à $D_{\frac{\pi}{2}}$; 3° que ces droites D_α sont tangentes à une parabole fixe dont on demande de déterminer géométriquement la position. (E. CESÀRO.)

Cette proposition n'est pas *entièrement* nouvelle. Voir, par exemple, CATALAN, *Théorèmes et problèmes*, 6e édition, p. 34. Rappelons aussi cet élégant théorème dû à Ferrers : *lorsque le point* P *parcourt la circonférence, la droite* $D_{\frac{\pi}{2}}$ (*droite de Simson*), *tangente au sommet d'une parabole inscrite à* ABC, *enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.* (*Nouvelles Annales*, année 1870, p. 73; année 1875, p. 21). Quelle est, dans les mêmes conditions, l'enveloppe de la droite D_α? (J. N.)

58. Trouver une infinité de solutions, entières, de chacune des équations :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 7(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 19(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 67(x^2 + y^2 + z^2), \text{ etc.}$$ (E. CATALAN.)

×QUESTIONS D'EXAMEN.

Algèbre.

32. Condition pour que $x^m + a^m$ soit divisible par $x^3 + a^3$.

[En commençant la division, on voit facilement que les dividendes partiels sont de la forme $(-1)^p a^{3p} x^{m-3p} + a^m$; pour que l'un d'eux s'annule, il faut qu'il soit indépendant de x (d'où $m = \text{M.3}$) et que le premier terme soit négatif (d'où m impair). *Autrement :* $x^m + a^m$ doit s'annuler pour $x = -a$, $x = -a\theta$, $x = -a\theta^2$, 0 et θ^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité, etc.]

33. Décomposer en facteurs $P = a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$.

[P s'annule pour $a = b$, $a = c$, $b = c$; d'où $P = (a-b)(b-c)(c-a)P'$. P′ est un polynôme du 1er degré qui est nécessairement symétrique par rapport à a, b, c; donc $P' = \alpha(a+b+c)$. En comparant les coefficients de a^3 dans les deux membres de l'égalité qui définit P′, on trouve $\alpha = -1$].

34. Décomposer en facteurs $P = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

[Réponse : $P = 3(a+b)(b+c)(c+a)$].

35. Prouver que le polynôme $P = (a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$ est divisible par le polynôme $P' = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$. Chercher le quotient.

[P et P′ s'annulent pour $a = -b$, $a = -c$, $b = -c$,... On peut donc écrire

$$P = P'[\alpha(a^2+b^2+c^2) + \beta(ab+ac+bc)] \qquad (2)$$

Pour déterminer les coefficients inconnus α, β, on peut remplacer, dans l'égalité (2), a, b, c par des valeurs numériques, telles que $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$; $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$. On obtient $\alpha = \beta = \frac{5}{3}$, de sorte que le quotient cherché est $\frac{5}{3}(\Sigma a^2 + \Sigma ab) = \frac{5}{6}\Sigma(a+b)^2 = \frac{5}{6}(\Sigma a^2 + \Sigma^2 a)$]

36. Décomposer en facteurs

$$P = a^3(c-b^2) + b^3(a-c^2) + c^3(b-a^2) + abc(abc-1).$$

[Réponse : $P = -(b-a^2)(c-b^2)(a-c^2)$.]

37. Démontrer que $(x+y)^6+(x-y)^6$, $(x^2+xy+y^2)^3+(x^2-xy+y^2)^3$, $(x+y)^{4n+2} + (x-y)^{4n+2}$ sont divisibles par $2(x^2+y^2)$, que $(x+y)^9 - (x-y)^9$ est divisible par $2y(3x^2+y^2)$.

38. Vérifier l'identité :

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

[Le 1er membre s'annule pour $a = b$, etc. On peut aussi s'appuyer sur l'exercice 34 ou sur l'identité connue

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(\Sigma x^2 - \Sigma xy).]$$

39. Vérifier l'identité

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a-b)(a-c) + 2(b-a)(b-c) + 2(c-a)(c-b).$$

[Si l'on réunit tous les termes dans le 1er membre, on obtient le carré de $(a-b) + (b-c) + (c-a)$.]

CARRÉ MAGIQUE DE LA VILLA ALBANI(*)

M. Catalan nous communique l'inscription suivante, qu'il a découverte à Rome, au printemps dernier :

QVADRATVS MAXIMVS.

15	58	29	34	63	49	74	41	6
7	27	31	81	23	76	80	18	26
38	8	30	71	47	20	21	78	56
73	19	25	42	10	33	50	65	52
22	55	72	1	45	60	28	16	70
79	35	39	66	2	48	17	24	59
14	64	69	12	77	3	51	68	11
46	36	61	53	40	43	4	54	32
75	67	13	9	62	37	44	5	57

LECTOR SI DOCTVS ADMIRATOR SI IGNARVS SCITO
QVADRATVS HIC MATHEMATICE CONSTRVCTVS
AB VNO VSQVE AD OCTOGINTA VNVM 3321 VNITATES
INCLVDIT QVÆLIBET IPSIVS COLVMNÆ TAM IN LINEA
PLANA QVAM IN RECTA ET TRANSVERSALI VNITATES
369 QVÆ DVCTÆ PER NOVEM EASDEM 3321 VNITATES
RESTITVVNT ET APPELLATVR MAXIMVS QVIA MAXIMAM
POSSIDET EXTENSIONEM VALE
CAETANVS GILARDONVS ROMANVS PHILOTECNOS
INVENTOR A. D. MDCCLXVI.

(*) A la prière de M. Catalan, le prince B. Boncompagni a fait copier, exactement, cette curieuse inscription.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Concours de 1881.

Une parabole (P) *étant donnée, on lui mène une normale* BCD *au point* B *situé, avec le foyer* F, *sur une perpendiculaire à l'axe* AE. *Trouver le lieu des sommets des sections faites par des plans contenant cette normale, dans le cylindre dont* (P) *est la section droite.*

Prenons pour axes de coordonnées la tangente BX, la normale BY à (P), et une perpendiculaire BZ au plan XBY.

Soient A le sommet de (P), C le point où BY rencontre AF, B′ le symétrique de B par rapport à AF. La tangente en B′ étant parallèle à BY, le diamètre de (P) mené par B′ passe par le milieu M de la corde normale BCD. On a donc :

$$BD = 2BM = 4BC = 4\sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{FC}^2} = 4p\sqrt{2}.$$

Par suite, l'équation de (P), rapportée aux axes BX, BY est

$$(y - x)^2 - 4p\sqrt{2}\,y = 0. \qquad (1)$$

Menons par BY un plan faisant avec le plan XBY l'angle θ et rapportons la section du cylindre parabolique (1) par ce plan à deux axes rectangulaires de coordonnées, BX′ et BY, tracées dans le plan. L'équation de la section se déduira de celle du cylindre par le changement de x en $x' \cos\theta$, de sorte qu'elle est

$$(y - x' \cos\theta)^2 - 4p\sqrt{2}\,y = 0.$$

L'axe de cette parabole a pour équation

$$y - x' \cos\theta - n = 0.$$

On détermine n par la condition que cette droite soit perpendiculaire à la tangente au point où elle rencontre la courbe ; ce qui donne

$$n = \frac{2p\sqrt{2}}{1 + \cos^2\theta}.$$

L'équation de l'axe de la section est donc :

$$y - x' \cos\theta - \frac{2p\sqrt{2}}{1 + \cos^2\theta} = 0.$$

L'ordonnée à l'origine de cet axe a pour valeurs extrêmes $2p\sqrt{2}$ ou BM

et $p\sqrt{2}$ ou AC. Les sommets des paraboles d'intersection se trouvent donc tous entre les génératrices du cylindre, menées par les points A et B'.

Si l'on revient aux axes primitifs BX, BY, $x' \cos\theta$ se change en x, et la projection de l'axe de la section aura pour équation :

$$y - x - \frac{2p\sqrt{2}}{1 + \cos^2\theta} = 0. \qquad (2)$$

On voit facilement que le lieu de ces axes est un conoïde ayant pour directrice la normale BY et pour plan directeur le plan représenté par $y - x = 0$.

Comme $\operatorname{tg}\theta = \frac{z}{x}$, l'équation du conoïde se déduit, immédiatement, de (2); on trouve

$$y - x = \frac{2p\sqrt{2}\,(z^2 + x^2)}{z^2 + 2x^2},$$

ou

$$z^2 = -\frac{2x^2\,(y - x - p\sqrt{2})}{y - x - 2p\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

Le lieu cherché est représenté par l'ensemble des équations (1) et (3); il est symétrique par rapport au plan XBY, a pour sommet le point A, pour asymptote la verticale menée par B', et possède, par conséquent, deux points d'inflexion. Le point B en est un point isolé.

H. Brocard.

SUR UNE APPLICATION DE L'ALGÈBRE DIRECTIVE.

Le théorème qui fait l'objet de la question 6, se trouve énoncé, sans démonstration, dans un beau mémoire de M. Laguerre, sur la ***Résolution des équations numériques*** (Nouvelles annales, année 1878, p. 22). Il peut être considéré comme un corollaire d'une proposition plus générale qui est due à Abel Transon (*) et que nous croyons utile de reproduire. Pour plus de facilité, nous rappelons les premiers principes de l'algèbre directive.

I. L'imaginaire

$$u = x + yi, \quad (i = \sqrt{-1})$$

(*) Voir *Nouvelles annales* de Gerono, année 1868, p. 251.

représente (*) un point M dont les coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires fixes OX, OY, sont égales à x et y. Les quantités réelles correspondent aux points de l'axe des abscisses, les imaginaires pures de la forme yi aux points de l'axe des ordonnées.

2. On peut mettre u sous la forme

$$u = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

en posant

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega.$$

Le *module* ρ est égal à la distance OM, l'*argument* ω à l'inclinaison de OM sur OX : ρ et ω sont les coordonnées polaires de M.

On dit aussi que u représente la droite OM. Alors on emploie la notation $\overline{OM}$ et l'expression de *chemin* OM pour rappeler, à la fois, la *grandeur* OM et l'*inclinaison* de OM sur OX, ou les deux éléments ρ, ω qui déterminent OM. D'ailleurs x et y sont les *projections* du chemin OM sur les axes OX, OZ.

3. Considérons deux imaginaires

$$u = x + yi = \rho(\cos\omega + i\sin\omega).$$
$$u' = x' + y'i = \rho'(\cos\omega' + i\sin\omega'),$$

qui définissent les chemins $\overline{OM}$, $\overline{OM'}$. Leur somme

$$u + u' = (x + x') + (y + y')i$$

correspond à un certain chemin $\overline{OS}$ qui a, pour projections sur les axes, les sommes des projections de $\overline{OM}$ et $\overline{OM'}$. On voit facilement que pour obtenir le chemin $u + u'$, il suffit de mener la droite MS égale et parallèle à OM', ou M'S égale et parallèle à OM. Autrement dit, $\overline{OS}$ est la diagonale du parallélogramme OM construit sur OM et OM'.

La différence $u - u'$ représente un chemin $\overline{OD}$ qui coïncide avec la diagonale du parallélogramme construit sur OM et sur une droite égale et parallèle à OM', mais dirigée en sens contraire.

4. Le produit

$$uu' = \rho\rho'[\cos(\omega + \omega') + i\sin(\omega + \omega')]$$

a un module égal au produit des modules des facteurs et un argument égal à la somme des arguments des facteurs. Soient $\overline{OP}$ le che-

(*) *Représenter*, dans cette phrase, signifie *faire connaître complètement*.

min uu', OA une longueur égale à l'unité, prise sur OX; on aura

$$OA.\,OP = OM.\,OM' \quad \text{ou} \quad OP : OM' = OM : OA,$$

$$\text{angle } POM' = \text{angle } MOA, \quad \text{angle } POM = \text{angle } M'OA.$$

Il en résulte que les triangles POM', POM sont respectivement semblables aux triangles MOA, M'OA et semblablement orientés.

5. Le quotient

$$\frac{u}{u'} = \frac{\rho}{\rho'}\left[\cos(\omega - \omega') + i \sin(\omega - \omega')\right]$$

représente un chemin $\overline{OQ}$ ayant pour module et argument, respectivement, le quotient des modules et la différence des arguments des chemins $\overline{OM}$, $\overline{OM'}$. Le point Q s'obtient par la construction d'un triangle QOM semblable à AOM' et semblablement orienté ou par celle d'un triangle QOA semblable à MOM'.

6. Considérons maintenant l'équation

$$u = \frac{(\alpha + \beta z) + (\alpha' + \beta' z)\, i}{(\gamma + \delta z) + (\gamma' + \delta' z)\, i}, \tag{1}$$

dans laquelle, pour plus de généralité, z est une variable de la forme $x + y\,i$. Soient $\overline{OZ}$ le chemin représenté par une valeur de z, $\overline{OU}$ le chemin correspondant u. Lorsque le point Z parcourt une courbe (Z), le point U parcourt une autre courbe (U); je dis que ***les lignes*** (Z), (U), ***étant convenablement placées, sont inverses l'une de l'autre.***

En effet, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$uz + \lambda u + \mu z + \nu = 0,$$

λ, μ, ν étant des quantités imaginaires connues; ou encore

$$(u + \mu)(z + \lambda) = \mu\lambda - \nu = \rho, \tag{2}$$

ρ désignant $\mu\lambda - \nu$. Soient $\overline{OM}$, $\overline{OL}$, $\overline{OR}$ les chemins μ, λ, ρ et $\overline{OU'}$, $\overline{OZ'}$ les chemins $u + \mu$, $z + \lambda$. Les droites UU', ZZ', sont respectivement égales et parallèles à OM, OL (3); par conséquent, les courbes (U'), (Z') sont égales aux courbes (U), (Z) qui ont subi des translations mesurées par $\overline{OM}$, $\overline{OL}$. Or l'égalité (2) se décompose en deux autres :

$$OU'.\,OZ' = OR, \quad \text{angle } U'OX + \text{angle } Z'OX = \text{angle } ROX,$$

dont la seconde indique que la bissectrice de l'angle U'OZ' coïncide avec celle de l'angle ROX. Par suite, si l'on fait tourner la ligne (U'), de π, autour de cette bissectrice, elle coïncidera avec une ligne inverse de (Z').

Si l'on n'attribue à z que des valeurs réelles, le point Z se meut sur OX ; la ligne (Z') sera une droite parallèle à OX et ayant pour figure inverse une circonférence. Par conséquent, (U) sera également une circonférence ; ce qui démontre la question 6.

7. On parvient à un théorème intéressant et, peut-être, nouveau, si l'on cherche à construire, d'après les nos 3, 4, 5, le chemin u qui correspond à une valeur réelle de z.

Soient $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ les chemins $\alpha + \alpha' i$, $\beta + \beta' i$, $\gamma + \gamma' i$, $\delta + \delta' i$; l'égalité (1) pourra s'écrire

$$u = \frac{\overline{OA} + z.\overline{OB}}{\overline{OC} + z.\overline{OD}}.$$

Menons par A et C les droites AA' et CC', respectivement, parallèles et proportionnelles à OB et OC (égales à z fois OB et OD). Lorsque z varie, les points A' et C' marqueront deux divisions rectilignes semblables. Pour obtenir $u = \overline{OA'} : \overline{OC'}$, il suffit de prendre sur OX une longueur OL égale à l'unité et de construire le triangle UOL semblable à A'OC'. En vertu du théorème de M. Laguerre, le point U décrit une circonférence. On peut donc énoncer la proposition suivante : *Si, sur une droite fixe* ab, *on construit des triangles* abc *semblables aux triangles* ABC *qui ont un sommet fixe* A *et dont les autres sommets* B, C *sont des points homologues de deux divisions rectilignes semblables, le point* c *décrit une circonférence.*

8. Comme l'a fait très bien remarquer Abel Transon, une équation $f(u, z) = 0$ entre deux nombres directifs u, z, ne représente pas une courbe déterminée, mais elle exprime une transformation de figures. Lorque le point Z qui représente une valeur de la variable imaginaire z parcourt une courbe (Z), le point U qui représente la valeur correspondante de u parcourt une seconde courbe (U) : l'équation $f(u, z) = 0$ exprime la loi d'après laquelle on passe de la première courbe à la seconde. Voici les significations des cas les plus simples de l'équation $f(u, z) = 0$.

L'équation $u = az$, dans laquelle a est un nombre réel, correspond à l'homothétie ; car les chemins $\overline{OU}$, $\overline{OZ}$ ont la même inclinaison, et les grandeurs OU, OZ sont dans un rapport constant.

Lorsque a est de la forme $r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, on passe de $\overline{OZ}$ à $\overline{OU}$ en augmentant l'inclinaison de OZ de l'angle α et en modifiant la longueur OZ dans le rapport $1 : r$. Par suite, les courbes (U) et (Z) sont

semblables : le rapport de similitude est égal à r, le centre de similitude est l'origine O, et, par une rotation, autour de O, d'un angle égal à α, (Z) deviendra homothétique à (U).

Le cas de $u = az + b$ ne diffère du précédent qu'en ce que la figure (U) doit encore subir une translation mesurée par le chemin b.

L'équation $uz = a$ correspond à deux figures dont l'une est symétrique d'une figure inverse de l'autre; l'axe de symétrie est le chemin a et le pôle d'inversion est l'origine des coordonnées.

9. Considérons deux équations de la forme :

$$uz + \lambda u + \mu z + \nu = 0, \qquad vz + \lambda' v + \mu' z + \nu' = 0,$$

z, u, v étant trois nombres directifs variables. Lorsqu'on élimine z, on aura, en général, une équation de la même forme

$$uv + \lambda'' u + \mu'' z + \nu'' = 0.$$

Donc, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, *lorsqu'on soumet une figure à deux inversions par rapport à deux pôles différents, les nouvelles figures, étant convenablement placées, sont encore inverses l'une de l'autre.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 6.

Si l'on convient de représenter par l'imaginaire $m + ni\,(i = \sqrt{-1})$ *un point dont les coordonnées rectangulaires sont m, n, l'imaginaire*

$$\frac{\alpha + \beta z + (\alpha' + \beta' z)\,i}{\gamma + \delta z + (\gamma' + \delta' z)\,i},$$

où z est une variable réelle, représente tous les points d'une même circonférence. (Laguerre).

Soient x, y les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la courbe inconnue. De l'identité

$$\frac{\alpha + \beta z + (\alpha' + \beta' z)\,i}{(\gamma + \delta z) + (\gamma' + \delta' z)\,i} = x + yi,$$

on conclut

$$\begin{aligned} \alpha + \beta z &= (\gamma + \delta z)\,x - (\gamma' + \delta' z)\,y \\ \alpha' + \beta' z &= (\gamma' + \delta' z)\,x + (\gamma + \delta z)\,y. \end{aligned} \qquad (1)$$

L'élimination de la variable z conduit à l'équation d'un cercle.

(E. Cesáro).

NOTE. Posons, pour abréger,

$$D = \delta x - \delta' y - \beta, \qquad D' = \delta' x + \delta y - \beta',$$
$$C = \gamma x - \gamma' y - \alpha, \qquad C' = \gamma' x + \gamma y - \alpha',$$

de sorte que les équations (1) pourront s'écrire :

$$Dz + C = 0, \qquad D'z + C' = 0.$$

L'équation de la courbe cherchée sera

$$CD' - C'D = 0. \qquad (2)$$

Les droites représentées par les équations $D = 0$, $D' = 0$, $C = 0$, $C' = 0$ sont, deux à deux, rectangulaires; par suite, ce sont les côtés d'un quadrilatère inscriptible à un cercle. L'équation (2) exprime que le produit des distances l'un point du lieu à deux côtés opposés de ce quadrilatère est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés. On retrouve ainsi une proposition connue. (J. N.)

×Question 35.

Étant donnée une circonférence AMBN *de diamètre* AB, *on projette chaque corde* MN, *perpendiculaire à* AB *en* PQ, *sur un diamètre* CD, *parallèle à* MN. *Le lieu des points m, n intersections des droites* AP, AQ, *avec* MN *est une courbe fermée dont l'aire est égale à celle de la circonférence.* (J. MISTER).

Solution de M. BROCARD *et de* M. PISANI. Supposons la corde MN menée entre A et CD, et soient M', N' les points où les droites MP, NQ rencontrent la demi-circonférence CBD, m', n' les points de rencontre de la corde M'N' et des droites AP, AQ. Les points m', n' appartiennent au lieu et l'on a $M'm' = Mm$, $N'n' = Nn$. Soient de même RS, R'S' deux cordes parallèles à CD, égales entre elles et voisines de MN, M'N', rs, $r's'$ les cordes correspondantes du lieu. On aura encore $R'r' = Rr$, $S's' = Ss$. Par suite, le trapèze $M'm'r'R' = Mmr R$ et de même $N'n's'S' = Nns S$. L'aire de la courbe est égale à celle de la circonférence, augmentée de la limite de la somme des trapèzes analogues à $M'm'r'R'$, $N'n's'S'$, et diminuée de la limite de la somme des trapèzes analogues à $MmrR$, $NnsS$, la hauteur de ces trapèzes diminuant indéfiniment, en même temps que leur nombre augmente. Ces deux sommes étant égales, les deux aires sont égales aussi.

Si l'on prend, au lieu de la circonférence, une courbe quelconque ayant un axe de symétrie CD, on en déduit, par le procédé indiqué dans l'énoncé, une autre courbe de même aire. En effet, la démonstration précédente est entièrement applicable.

NOTE.

La courbe AmCm'Bn'DnA a un point de rebroussement en A, elle touche le cercle en B, et les droites AC, AD en C et D. Son aspect général est celui d'une *toupie*. C'est une courbe du quatrième ordre ou *quartique*. Si l'on prend AB pour axe des x, une perpendiculaire par A pour axe des y, on trouve pour équation :

$$Ry = x\sqrt{x(2R - x)}$$

R étant le rayon de la circonférence primitive. Le maximum de y, correspondant au point de la courbe le plus éloigné de AB, s'obtient en posant

$$\frac{x}{3} = 2R - x,$$

ou $x = \frac{3}{2}$R. Il y a aussi deux points d'inflexion situés entre le point de rebroussement et les points les plus éloignés de AB. (P. M.)

Question 36.

Trois droites AA', BB', CC', *issues des trois sommets d'un triangle* ABC, *et partageant les côtés opposés aux points* A', B', C', *en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents, se coupent évidemment en un même point* ω. *Démontrer que ce point est le centre d'une infinité d'ellipses semblables, dont chacune est le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux côtés du triangle est constante. Pour un triangle donné, chercher la direction des axes des ellipses.* (E. Cesáro.)

Soit M (x,y) un point du lieu, les axes de coordonnées étant CB et CA. On sait que le point ω est le centre des médianes antiparallèles; ses coordonnées sont

$$x = \frac{ab^2}{a + b^2 + c}, \quad y = \frac{a^2b}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

En exprimant que les carrés des distances de M aux côtés de ABC ont une somme constante K^2, on trouve

$$y^2 \sin^2 C + x^2 \sin^2 C + \frac{(ay + bx - ab)^2 \sin^2 C}{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = K^2.$$

Mais

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2, \quad \sin C = \frac{c}{2R},$$

R étant le rayon du cercle circonscrit à ABC; par suite, l'équation du lieu est encore

$$y^2(a^2 + c^2) + 2abxy + x^2(b^2 + c^2) - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 - 4K^2R^2 = 0. \quad (1)$$

Quand K varie, elle représente des ellipses homothétiques de centre commun ω.

Si l'on choisit la valeur $K^2 = \frac{a^2b^2}{4R^2} = h_c^2$, la courbe passe à l'origine, et la tangente en ce point, représentée par $ax + by = 0$, est parallèle à AB. Les directions AB et ωC sont donc conjuguées; il est de même des directions AC, ωB et des directions BC, ωA, toutes les courbes (1) étant homothétiques.

Cela posé, pour trouver les directions des axes de ces courbes, considérons l'ellipse qui passe par A. Nous cherchons d'abord la longueur du diamètre parallèle à CB. A cet effet, soient I, J les points où la tangente en A, parallèle à CB est rencontrée par la droite Cω et par une parallèle à AB, menée par ω; ωI et ωJ étant deux diamètres conjugués, le carré du demi-diamètre parallèle à CB, d'après un théorème connu, sera égal à AI · AJ. Connaissant en grandeur et en direction un système de diamètres conjugués, on est ramené à un problème connu : la circonférence décrite sur IJ comme diamètre rencontre la perpendiculaire élevée en A sur IJ en deux points K, K′ que l'on joindra à ω, et les directions des axes seront les bissectrices de l'angle KωK′ et de son adjacent supplémentaire.

E. Lemoine,
ancien élève de l'école polytechnique.

Autre solution par M. F. Pisani, professeur à Messine.

Note. — Voici, d'après M. P. Serret, *Géométrie de direction*, p. 244, une seconde solution de la question 36. Si l'on prend, pour coordonnées

de M, les distances de ce point aux côtés du triangle de référence ABC, les courbes (1) sont encore représentées par

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = K^2,$$

ou, sous forme homogène, par

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = K^2\left(\frac{\alpha}{h_a} + \frac{\beta}{h_b} + \frac{\gamma}{h_c}\right)^2.$$

A la valeur $K = 0$, correspond une ellipse (imaginaire) D, homothétique et concentrique aux courbes (1), conjuguée avec le triangle ABC. Les axes de D et la droite à l'infini peuvent être considérés comme formant un second triangle conjugué avec D. Les côtés de ces deux triangles autopolaires par rapport à une même conique D, sont circonscrits à une autre conique E, qui est une parabole comme étant tangente à la droite à l'infini. Les points de concours, H et ω des hauteurs des deux triangles circonscrits à E sont sur la directrice. Les symétriques de la directrice ωH par rapport aux tangentes AB, BC, CA déterminent, par leur intersection, le foyer F et E. Enfin les tangentes menées du point ω de la directrice, à la parabole E, c'est-à-dire les axes de D sont les bissectrices des angles formés par les droites ωH, ωF. (J. N.)

×Question 49.

Résoudre un triangle rectangle ABC, *connaissant les rayons des cercles inscrits dans les deux triangles* ABD, ACD *dans lesquels le triangle cherché est décomposé par la droite menée du sommet de l'angle droit au milieu* D *de l'hypoténuse.* (Concours académique de Bordeaux, 1878.)

Cette question a été résolue par M. Fouquet, élève du collège communal d'Ostende; MM. Navet, Duyckaerts et A. Lambert, élèves du collège de St-Trond; M. Barzin, régent à Andenne; M. Rocchetti, professeur au lycée de Messine et M. F. Pisani. Nous allons résumer la solution de M Lambert, qui est, à la fois, la plus simple et la plus complète.

Soient : O, O_1, O_2, les centres des cercles inscrits aux triangles ABC, ABD, ACD; r, r_1, r_2, leurs rayons; E, E_1 E_2, les points où ils touchent BC; D_1, D_2 les milieux de AB, AC; a, b, c, h, les côtés et la hauteur de ABC. On sait que $DA = DB = DC = \frac{1}{2}a$.

Les triangles rectangles O_1D_1B, O_2D_2C donnent

$$r_1 = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}, \quad r_2 = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}; \qquad (1)$$

d'où

$$r_1 r_2 = \frac{bc}{4} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r^2}{2}, \quad r^2 = 2r_1 r_2 \text{ (*)}, \tag{2}$$

car l'aire ABC a pour mesure $\frac{1}{2} bc$ et $r^2 \cot.\frac{A}{2} \cot.\frac{B}{2} \cot.\frac{C}{2}$.

Des relations (1), on tire encore :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{c \operatorname{tg}\frac{B}{2}}{b \operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{tg} C . \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{2}{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2}; \tag{3}$$

par conséquent :

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{2r_2}{r_1}} - 1, \quad b = \frac{2r_2}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{2r_2}{\sqrt{\frac{2r_2}{r_1}} - 1},$$

ou, si l'on tient compte de la formule (2),

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r - r_1}{r_1}, \quad b = \frac{r^2}{r - r_1}. \tag{4}$$

Par analogie,

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r - r_2}{r_2}, \quad c = \frac{r^2}{r - r_2}. \tag{5}$$

Enfin

$$a = b + c - 2r = \frac{2r(r_1 + r_2 - r)}{3r - 2r_1 - 2r_2}.$$

La formule (2), jointe à l'une des formules (4) et (5), conduit facilement à la construction du triangle ABC.

NOTE. 1° Soient P_1, I_1, P_2, I_2 les points où des parallèles à BC, menées par O_1, O_2 rencontrent les droites OE, OC, OB. Dans les triangles rectangles OP_1I_1, OP_2I_2,

$$OP_1 = r - r_1 = P_1I_1 \operatorname{tg}\frac{C}{2}, \quad OP_2 = r - r_2 = P_2I_2 \operatorname{tg}\frac{B}{2};$$

en comparant aux valeurs de $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ trouvées ci-dessus, on obtient

$$P_1I_1 = r_1 = O_1E_1, \quad P_2I_2 = r_2 = O_2E_2. \tag{6}$$

(*) Cette jolie relation manque dans les autres solutions, excepté dans celle de M. Duyckaerts, qui ne nous est parvenue qu'après celle de M. A. Lambert.

On peut donc énoncer ce théorème assez curieux :

Dans un triangle rectangle ABC, *on mène la médiane* AD *et, du centre* O *du cercle inscrit, on abaisse, sur l'hypoténuse, une perpendiculaire* OE *rencontrant* AB *en* F_1, AC *en* F_2. 1° *Les cercles inscrits aux triangles* ABD, ACD *sont respectivement égaux aux cercles inscrits à* F_2CE. F_1BE ; 2° *La distance* AO *est moyenne proportionnelle entre les diamètres des cercles inscrits à* ABD *et* ACD

Nous engageons le lecteur à chercher une démonstration, par la géométrie (triangles semblables), des relations (2) et (6).

2° On sait que *l'inverse du rayon du cercle inscrit à un triangle est égal à la somme des inverses des trois hauteurs ;* lorsqu'on remplace le cercle inscrit par un cercle exinscrit, il faut changer le signe de l'une des hauteurs. D'après cela

$$\frac{1}{h}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2r_1},\quad \frac{1}{h}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2r_2},\quad \frac{1}{h}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{r}. \tag{7}$$

On conclut, de ces égalités,

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{r}-\frac{1}{2r_2},\quad \frac{1}{c}=\frac{1}{r}-\frac{1}{2r_1},\quad \frac{1}{h}=\frac{1}{2r_1}+\frac{1}{2r_2}-\frac{1}{r}; \tag{8}$$

en faisant intervenir la formule $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, on retrouve $r^2=2r_1r_2$, $r=\pm\sqrt{2r_1r_2}$.

Prenons, d'abord, $r=+\sqrt{2r_1r_2}$. Les valeurs de b et c seront positives, si $\frac{1}{2}<(r_1:r_2)<2$; ainsi le *rapport des rayons des cercles inscrits à* ABD *et* ACD *peut varier entre* $\frac{1}{2}$ *et* 2. Dans l'hypothèse $r_1>2r_2$, on a une valeur positive pour c et une valeur négative pour b. Si l'on prend $r=-\sqrt{2r_1r_2}$, b et c auront des valeurs négatives. Les solutions négatives s'interprètent en substituant des cercles ex-inscrits aux cercles inscrits.

On parvient à des résultats analogues en exprimant que $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ sont comprises entre 0 et 1, et en examinant les *deux* valeurs de $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ qui résultent de l'équation (3). (J. N.)

QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE,

par Éd. Lucas.

1. Si l'on divise p termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison r par un nombre p, premier avec chacun des nombres r, $r+1$, $r-1$, la différence de deux restes quelconques n'est jamais, en valeur absolue, égale à la différence des rangs qu'ils occupent dans la progression.

2. Calculer le nombre des termes r de la suite

$$1, 2, 3, \ldots\ldots p,$$

tels que le produit $r(r+1)(r-1)$ soit premier avec p. On supposera p décomposé en ses facteurs premiers.

3-6. Calculer le nombre des termes r de la même suite, de telle sorte que le produit $r(r+r_1)(r+r_2)$ soit premier avec p.

On supposera r_1 et r_2 premiers avec p, et successivement :

1° r_1 et r_2 premiers entre eux, $r_1 - r_2$ premier avec p ;

2° r_1 et r_2 premiers entre eux, $r_1 - r_2$ non premier avec p ;

3° r_1 et r_2 non premiers entre eux, $r_1 - r_2$ premier avec p ;

4° r_1 et r_2 non premiers entre eux, $r_1 - r_2$ non premier avec p.

7. Donner la formule générale pour trois nombres r_1, r_2, r_3, de telle sorte que $r(r+r_1)(r+r_2)(r+r_3)$ soit premier avec p. — Cas de n nombres $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$.

8. Si dans un carré de p^2 cases, on pose p reines sur les cases ayant pour coordonnées :

$$x_i = x_0 + i, \quad y_i = y_0 + ir,$$

en supposant que i prenne les valeurs $1, 2, 3, \ldots\ldots p$, et que le produit $r(r+1)(r-1)$ soit premier avec p, on forme une figure telle que deux reines quelconques ne sont jamais situées sur la même ligne, sur la même colonne, ou sur la même diagonale. Déterminer le nombre des figures différentes formées par les p reines (*).

(*) Les meilleures solutions de chacun de ces problèmes seront publiées ou analysées dans le Livre des *Récréations mathématiques*, de M. Ed. Lucas, dont le premier volume paraîtra incessamment, chez M. Gauthier-Villars.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***59-61.** Soient ABCDE.....L une courbe dont la concavité est tournée vers une droite *al* sur laquelle on a abaissé des perpendiculaires, équidistantes d'une quantité h, savoir :

$$aA = y_1, \quad bB = y_2, \quad cC = y_3, \quad \ldots, \quad lL = y_n.$$

I. L'aire $S = aABC\ldots L l$ est donnée, approximativement, par la formule de M. Catalan (*) :

$$S = C \text{ (approximativement)},$$

$$C = h\left(\tfrac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + y_n\right)$$

$$+ \tfrac{1}{4}h\left(\frac{y_2 + y_{n-1}}{2} - \frac{y_1 + y_n}{2}\right) - \tfrac{1}{12}\left(\frac{y_3 + y_{n-2}}{2} - \frac{y_2 + y_{n-1}}{2}\right),$$

avec une erreur moindre que

$$\tfrac{3}{4}h\left(\frac{y_2 + y_{n-1}}{2} - \frac{y_1 + y_n}{2}\right).$$

II. Si $n - 1$ est divisible par 3, la seconde formule de Simpson :

$$S = s' \text{ (approximativement)},$$

$$s' = \tfrac{3}{8}h\left[(y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4) + (y_4 + 3y_5 + 3y_6 + y_7) + \cdots + (y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n)\right],$$

donne S, aussi avec une erreur moindre que

$$\tfrac{3}{4}h\left(\frac{y_2 + y_{n-1}}{2} - \frac{y_1 + y_n}{2}\right).$$

III. Si $n = 7$, la formule de Weddle :

$$S = w \text{ (approximativement)},$$

$$w = \tfrac{3}{10}h\left(y_1 + 5y_2 + y_3 + 6y_4 + y_5 + 5y_6 + y_7\right),$$

comporte une erreur moindre que

$$6h\left(y_2 + y_4 + y_6\right) - 3w. \qquad \text{(P. M.)}$$

62. Lorsque les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites qui se coupent, un point de la droite décrit une

---

(*) La formule de M. E. Catalan, comme les deux formules de Simpson, donne exactement l'aire d'une parabole du *troisième* degré. (P. M.)

ellipse. Démontrer que l'aire de l'ellipse est indépendante de l'angle des deux droites. (STEINER.)

63. Lorsque les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites de l'espace, cette droite engendre une surface du 4me ordre ; démontrer que le volume compris entre cette surface et deux plans fixes parallèles aux deux droites ne varie pas, lorsque les deux directrices se déplacent d'une manière quelconque dans deux plans parallèles aux plans donnés. (E. LUCAS.)

64. Lorsque trois points d'une droite glissent sur les faces d'un trièdre, un quatrième point de cette droite décrit un ellipsoïde; démontrer que le volume de l'ellipsoïde est indépendant de l'inclinaison des faces du trièdre. (E. LUCAS.)

×**65.** Soient r, R, l'apothème et le rayon d'un polygone régulier, ρ étant le rayon de la circonférence isopérimètre avec ce polygone, on a

$$\frac{1}{3}(r + 2R) > \rho > \sqrt[3]{rR^2}\ (*) \qquad \text{(E. CATALAN.)}$$

×**66.** *Application de la Géométrie à l'Algèbre.* Étant donnés trois nombres p, q, c, on décompose le troisième en deux parties a, b, de manière que

$$\frac{b}{p^2} + \frac{a}{q^2} = \frac{1}{c}.$$

On fait ensuite :

$$p' = \frac{ac}{q}, \quad q' = \frac{ab}{q}.$$

Cela posé, toutes les solutions des équations

$$\frac{u}{p} + \frac{v}{q} = 1, \quad \frac{v}{p'} + \frac{w}{q'} = 1,$$

rendent identiques l'équation

$$au^2 + bv^2 - cw^2 = abc. \qquad \text{(E. CATALAN.)}$$

(*) Cette question n'est pas entièrement nouvelle. Elle résulte d'une Note de M. A. Cambier (*Revue de l'Instruction publique en Belgique*) et d'une Note de M. *** (*Journal de mathématiques élémentaires*, juin 1881). (E. C.)

COURBE DE CONTACT D'UN CYLINDRE CIRCONSCRIT A UN HÉLICOÏDE A PLAN DIRECTEUR,

par M. MISTER, professeur à l'École du génie civil à Gand.

La courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un hélicoïde gauche à plan directeur est, comme l'on sait, une hélice dont le pas est la moitié de celui de l'hélicoïde(*). On peut donner de ce théorème une démonstration élémentaire très simple qui ne repose sur aucune des considérations relatives à la construction des plans tangents aux surfaces gauches. Elle est fondée sur les propositions suivantes bien connues :

I. « Lorsqu'une hélice est éclairée par des rayons parallèles à l'une « de ses tangentes, l'ombre de cette hélice sur un plan perpendiculaire à « l'axe du cylindre sur lequel elle est tracée, est une cycloïde dont le « cercle générateur est le cercle de base du cylindre. »

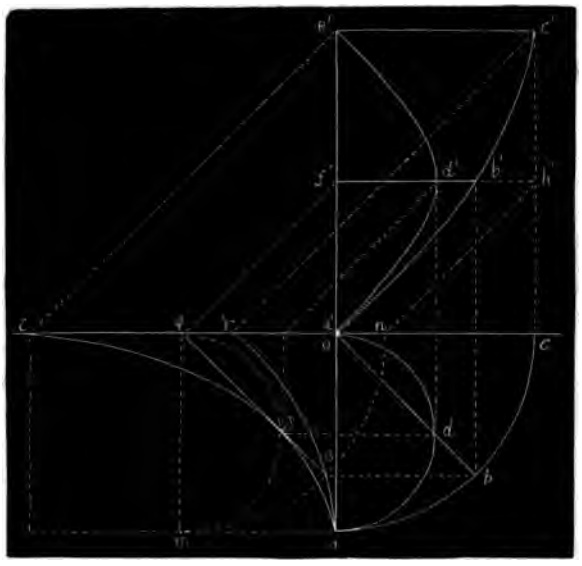
II. « Lorsqu'un cercle roule sans glisser sur l'une de ses tangentes, « l'enveloppe d'un de ses diamètres est une cycloïde engendrée par un « point d'un cercle de rayon sous-double roulant sans glisser sur la « même tangente. »

Voici comment on peut démontrer ces propriétés en même temps que le théorème relatif à l'hélicoïde qui est l'objet principal de cette note.

Considérons seulement la partie de l'hélicoïde correspondant à un quart ABC de spire de l'hélice directrice; soient abc, $a'b'c'$ les projections de cette hélice; $a'f'e'$ son axe situé dans le plan vertical; $(oc, e'c')$ la génératrice extrême de l'hélicoïde. La première génératrice (oa, a') de cette surface est d'ailleurs dans le plan horizontal et perpendiculaire à la ligne de terre. L'hélice directrice a été choisie de telle sorte que l'on ait $Bb = \text{arc } ab \times \text{tang } \omega$, ω étant l'angle de la direction des rayons lumineux, supposés parallèles au plan vertical, avec le plan horizontal, et B étant le point de l'hélice qui a pour projections b et b'. Cette hélice s'obtient en coupant l'hélicoïde par un cylindre concentrique dont le rayon r est déterminé par l'équation $p = 2\pi r \text{ tang } \omega$, p désignant le pas de l'hélicoïde.

(*) Voir l'élégante démonstration de ce théorème donnée par M. Verstraeten, *Mathesis*, p. 49; le Cours de Géométrie descriptive de M. Mannheim, p. 380; ou le Traité de M. de la Gournerie, 3e partie, p. 159. Le théorème I est dû à Guillery.

Cela posé, cherchons l'ombre d'une génératrice quelconque $(ob, f'b')$ de l'hélicoïde sur le plan horizontal. Cette ombre sera évidemment une droite $\varphi\beta$ parallèle et égale à ob, le point φ, ombre de (o, f'), étant tel que $f'a' = o\varphi \text{ tang } \omega$. Comme $f'a' = B\beta = \text{arc } ab \times \text{tang } \omega$, on a $o\varphi = \text{arc } ab$. Le quart de cercle horizontal ayant pour projections $abc, f'h'$ a pour ombre le quart de cercle $m\beta n$ de centre φ et de rayon $\varphi\beta$ ou ob. Puisque $ma = \varphi\varrho = \text{arc } ab$, le point β appartient à la cycloïde engendrée par le point a du cercle abc, quand ce cercle roule



sur sa tangente am. L'ombre de l'hélice directrice $(abc, a'b'c')$ est donc la cycloïde $\alpha\beta\gamma$.

Sur $m\varphi$ comme diamètre, décrivons une circonférence $\varphi\delta m$ coupant le rayon $\varphi\beta$ en δ. L'arc $m\delta$ est égal à $m\beta$ ou ab. Le lieu des points δ, pieds des perpendiculaires abaissées des points analogues à m sur les ombres $\varphi\beta$ des génératrices de l'hélicoïde est donc la cycloïde $\alpha\delta\varepsilon$ engendrée par le point a de la circonférence oda, de diamètre oa, roulant sur ma. Les tangentes à cette cycloïde sont les droites analogues à $\varphi\beta$. Donc l'enveloppe de l'ombre des diverses génératrices de l'hélicoïde est la cycloïde $\alpha\delta\varepsilon$.

Le point δ est l'ombre du point D (d, d') situé sur $(ob, f'b')$. Le lieu des points D est la courbe de contact que nous cherchons. La projection

horizontale d de D est sur la circonférence *oda*. Le point D est d'ailleurs à une hauteur $Dd = f'a'$ au-dessus du plan horizontal. Par suite, on a $Dd = \text{arc } ad \times \text{tang } \omega$. Le lieu des points D est donc une hélice tracée sur un cylindre *oad* de diamètre égal au rayon du cylindre *abc* sur lequel se trouve l'hélice directrice (*abc a'b'c'*), et caractérisée par le même angle ω; ce qu'il fallait démontrer (*).

Il résulte évidemment de ce qui précède que « l'intersection de l'héli- » coïde gauche à plan directeur avec un cylindre de révolution passant » par l'axe de l'hélicoïde, est une hélice dont le pas est la moitié » de celui de l'hélicoïde; » théorème connu.

SUR LA SOMMATION DE CERTAINES SÉRIES,

d'après M. E. CATALAN.

1. ***Méthode de M. Catalan.*** La question 27, dont nous avons inséré deux solutions, p. 76-77, est un cas particulier d'un problème général traité par M. Catalan, en 1856, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XV, p. 293-295, de la manière suivante :

Soient F (x) le produit des facteurs x, $x+1$, $x+2,\ldots$, $x+p$, *ou de quelques uns* d'entre eux, $f(x)$ un polynôme entier, de degré inférieur à celui de F (x), d'au moins *deux* unités. Posons

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x(x+1)} + \frac{B}{(x+1)(x+2)} + \ldots + \frac{L}{(x+p-1)(x+p)},$$

A, B,..., L étant des constantes à déterminer. Chassons les dénominateurs, puis faisons $x=0$, $x=-1$, $x=-2,\ldots$, $x=-p+1$. Nous obtiendrons p relations qui permettent de trouver les coefficients A, B,..., L. (**).

(*) Il est très intéressant de construire l'*épure* complète relative à l'ombre de l'hélicoïde à plan directeur en le supposant limité à une hélice quelconque d'axe $of'e'$. Cette hélice aura pour ombre sur le plan horizontal une cycloïde allongée ou une cycloïde raccourcie. L'enveloppe de toutes les cycloïdes allongées ou raccourcies ainsi obtenues est la cycloïde $\alpha\delta\varepsilon$.

(**) Nous laissons à nos jeunes lecteurs le soin de prouver que A, B,..., L ont toujours des valeurs déterminées. Si quelques-uns des facteurs $x+1$, $x+2,\ldots$ manquent dans F (x), on peut ne pas faire entrer ces facteurs dans les dénominateurs des fractions du second nombre. Dans tous les cas d'ailleurs, on peut modifier ce second membre de bien des manières.

Cela fait, soit à chercher la somme S de la série

$$\frac{f(1)}{F(1)}+\frac{f(2)}{F(2)}+\frac{f(3)}{F(3)}+\cdots=\sum_{1}^{\infty}\frac{f(x)}{F(x)}.$$

On aura

$$S=A\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{x(x+1)}+B\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+L\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(x+p-1)(x+p)}.$$

Donc (*Mathesis*, p. 32),

$$S=A+\frac{B}{2}+\frac{C}{3}+\cdots+\frac{L}{p}.$$

2. *Transformation de la méthode de M. Catalan.* On peut arriver à ce résultat au moyen de la décomposition en fractions rationnelles simples, telle qu'on la pratique habituellement. Soit

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\cdots+\frac{m}{x+p},$$

a, b,..., m étant encore des constantes. On peut les déterminer, soit par le procédé qui a donné plus haut A, B, C,..., L, soit en s'aidant du calcul différentiel. Si l'on multiplie par x les deux membres de l'égalité précédente, il vient

$$\frac{xf(x)}{F(x)}=a+\frac{b}{1+\frac{1}{x}}+\cdots+\frac{m}{1+\frac{p}{x}},$$

et, pour $x=\infty$,

$$0=a+b+c+\cdots+m.$$

On rencontre cette relation parmi celles qui donnent a, b,..., m, si l'on emploie le procédé algébrique indiqué plus haut.

On a évidemment

$$\frac{f(x)}{F(x)}=a\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+(a+b)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots$$

$$+(a+b+\cdots+l)\left(\frac{1}{x+p-1}-\frac{1}{x+p}\right)+(a+b+\cdots+l+m)\frac{1}{x+p};$$

par suite, en remarquant que le dernier terme est nul dans le second membre,

$$S=a+\frac{a+b}{2}+\frac{a+b+c}{3}+\cdots+\frac{a+b+c+\cdots+l}{p}.$$

3. *Autre transformation.* On peut encore arriver au même résultat comme il suit. On a

$$\sum_1^n \frac{f(x)}{F(x)} = \sum_1^n \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \cdots + \frac{l}{x+p-1} + \frac{m}{x+p}\right) =$$

$$a\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) + b\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right) + \cdots$$

$$+ l\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}\right) + m\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right),$$

ou encore

$$\sum_1^n \frac{f(x)}{F(x)} = \left[a\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right) + b\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}\right) + \cdots + l\frac{1}{p}\right]$$

$$+ (a+b+\cdots+m)\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$+ \left[b\frac{1}{n+1} + c\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) + \cdots + m\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right)\right].$$

Le second terme du second membre est nul; le troisième a zéro pour limite, quand n croît indéfiniment. Donc

$$S = a\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right) + b\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}\right) + \cdots + l\frac{1}{p}.$$

4. *Autre méthode.* On trouve, dans le *Calcul des différences* de Boole, une autre méthode pour obtenir S. Elle semble moins expéditive que la précédente. Nous croyons utile néanmoins de la faire connaître. Posons

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{M}{x(x+1)} + \frac{N}{x(x+1)(x+2)} + \frac{P}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$$

$$+ \frac{T}{x(x+1)\cdots(x+p)}.$$

Chassons les dénomtnateurs, puis faisons $x = -p$, $-p+1$, $-p+2,\ldots$, -2, -1. Nous obtiendrons p relations donnant M, N,... T. On a ensuite (*Mathesis*, p. 32)

$$S = M\sum_1^\infty \frac{1}{x(x+1)} + N\sum_1^\infty \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \cdots + T\sum_1^\infty \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+p)}$$

$$= M + \frac{1}{2}\frac{N}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\frac{P}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{p}\frac{T}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}.$$

5. ***Exemple.*** On a

$$\frac{3x+1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{1}{6}\frac{1}{x(x+1)}+\frac{7}{6}\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{8}{6}\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{1}{6}\frac{1}{x}+1\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{5}{2}\frac{1}{x+2}+\frac{8}{6}\frac{1}{x+3}$$

$$=0\cdot\frac{1}{x(x+1)}+3\frac{1}{x(x+1)(x+2)}-8\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Donc

$$S=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{2}-\frac{8}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{36},$$

$$S=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{36},$$

$$S=\frac{1}{2}\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{1}{3}\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{11}{36}.$$

6. ***Généralisation.*** Les deux méthodes exposées plus haut peuvent servir à trouver la somme des suites dont le terme général est

$$\frac{f(x)}{(x+\alpha)(x+\beta)\ldots(x+\mu)};$$

α est une quantité quelconque, réelle ou imaginaire, $\alpha-\beta$, $\alpha-\gamma,\ldots$, $\alpha-\mu$ des nombres entiers positifs ou négatifs, x une variable qui prend successivement des valeurs k, $k+1,\ldots$, $k+r$, k étant quelconque, pourvu que le dénominateur ne s'annule pour aucune des valeurs de x. Le numérateur $f(x)$ est un polynôme entier de degré inférieur au dénominateur. Si la différence des degrés est égale, ou supérieure, à ***deux***, on peut faire $r=\infty$. Dans le cas contraire, il y a dans le second membre une suite finie de termes analogues à ceux de la série harmonique dont on peut trouver la somme approximativement par une méthode que nous ferons connaître ultérieurement. (P. M.)

SUR LA SÉRIE HARMONIQUE (*).

I. D'après une formule connue, on a

$$l\frac{n+1}{n-1}=\frac{2}{n}+2u_{n-1},$$

si l'on pose

$$u_{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{n^7}+\cdots.$$

Changeant n en $n-1$, $n-2\ldots 4, 3, 2$, et ajoutant, on obtient

$$l\frac{n(n+1)}{2}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+2(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}),$$

ou bien, en faisant

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\quad S_{n-1}=u_1+u_2+\cdots+u_{n-1};$$

$$l\frac{n(n+1)}{2}=2H_n-2+2S_{n-1},$$

d'où

$$H_n=l\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+1-S_{n-1}.$$

II. Pour calculer S_{n-1}, étudions la série $u_1+u_2+u_3+\cdots$. On a

$$u_{n-1}<\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}+\cdots\right]=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n}\right].$$

On obtient, par addition,

$$S_{n-1}<\frac{1}{12}-\frac{1}{6n(n+1)}.$$

Donc S_{n-1} tend vers une limite S, inférieure à $\frac{1}{12}$. Les termes étant positifs, on a

$$S_{n-1}<S. \qquad (1)$$

On trouve de même,

$$S-S_{n-1}=u_n+u_{n+1}+\cdots<\frac{1}{6n(n+1)},$$

d'où

$$S_{n-1}>S-\frac{1}{6n(n+1)}. \qquad (2)$$

(*) Voir un premier article sur le même sujet, dans le n° d'avril, p 51-53.

D'après les inégalités (1) et (2), on peut poser

$$S_{n-1} = S - \frac{\theta}{6n(n+1)},$$

θ étant compris entre 0 et 1.

III. Si l'on remplace S_{n-1} par sa valeur, on a

$$H_n = l\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + 1 - S + \frac{\theta}{6n(n+1)},$$

ou bien

$$H_n = l\sqrt{n(n+1)} + C + \frac{\theta}{6n(n+1)}, \qquad (3)$$

C désignant une constante. Par d'autres considérations, on trouve

$$C = 0{,}577215664.....$$

La formule (3) donne H_n avec une grande approximation.

E. Cesáro.

BIOGRAPHIE ET BIBLIOGRAPHIE.

Le nom et la date de la mort de Tartaglia.

On sait que Scipio Ferreo, professeur de mathématiques à Bologne de 1496 à 1525, parvint, au commencement du seizième siècle, à résoudre les équations cubiques de la forme $x^3 + mx = n$, m et n étant positifs. Nicolo, surnommé Tartaglia ou le Bègue, qui peut-être eut quelque connaissance de ce premier résultat, parvint de 1535 à 1541, à la solution de *toutes* les espèces d'équations du troisième degré. Cardan combinant les renseignements qu'il s'était procurés sur la méthode de Scipio Ferreo et ceux qu'il était parvenu à extorquer à Tartaglia, publia sans l'aveu de celui-ci, en 1545, la méthode de résolution encore aujourd'hui la plus répandue. Tartaglia réclama en vain contre la mauvaise foi de Cardan Il mourut avant d'avoir pu donner au public un exposé de ses découvertes sur les équations cubiques, et la formule qui aurait dû porter le nom de Tartaglia est appelée aujourd'hui encore *formule de Cardan*.

Jusqu'à présent, on avait ignoré la date de la mort de Tartaglia : elle était rapportée différemment par divers auteurs. M. B. Boncompagni vient de la faire connaître exactement, grâce à la découverte du testament de Tartaglia, et à une note manuscrite insérée au verso du deuxième feuillet de cette pièce authentique. Il résulte de ces deux écrits que Tartaglia, né à Brescia en 1500 ou 1501, est mort à Venise, dans la nuit du 13 au 14 décembre 1557. Son vrai nom est Nicolo Fontana.

La brochure d'où ces derniers renseignements sont tirés est extraite des

Collectanea mathematica, publiés cette année même, en mémoire de Chelini, chez Hoepli à Milan. En voici le titre exact : *Testamento inedito—di—Nicolò Tartaglia—publicato—da—B. Boncompagni—Napoli Milano Pisa—Ulrico Hoepli—editore librajo* — 1881; cinquante pages petit in-4, avec une reproduction en fac simile du testament de Tartaglia. La brochure du savant éditeur du *Bullettino* contient tous les renseignements bibliographiques imaginables sur la question qui s'y trouve traitée. (P. M.)

Traité d'Arithmétique élémentaire, à l'usage des écoles moyennes, des écoles normales, des cours professionnels et des classes d'humanités par l'abbé E. Gelin, docteur en philosophie et en théologie, professeur de mathématiques supérieures au collège S. Quirin à Huy. Huy, chez l'Auteur, collège S. Quirin. Un vol. in-8 de 242 pages. Prix : fr. 3-50.

Ouvrage écrit avec une clarté et une précision remarquables, très bien divisé et subdivisé, et absolument irréprochable au point de vue de la rigueur des démonstrations. Ordre suivi par l'auteur : I. Opérations sur les nombres entiers, y compris l'extraction des racines. II. Propriétés des nombres entiers. III. Opérations sur les fractions ordinaires et les fractions décimales. IV. Rapports et proportions. V. Mesures. VI. Résolution des problèmes. — La théorie des fractions périodiques est exposée sans recourir à la notion des limites. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 15.

Des différents points d'une droite AB, *on abaisse des perpendiculaires sur les polaires de ces points par rapport à une conique* C. *Le lieu des pieds de ces perpendiculaires est le même que celui des points de contact des tangentes menées du pôle de* AB *aux coniques homofocales de la première. Dans quel cas ce lieu se réduit-il à une conique ou à une droite?* (Miller.)

1° Supposons que le conique C soit une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

La polaire d'un point M (x', y'), et la perpendiculaire abaissée de M sur cette droite sont représentées par

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

$$a^2xy' - b^2yx' - c^2x'y' = 0. \qquad (3)$$

Soient (α, β) les coordonnées du pôle de la droite AB; exprimant que le point M se meut sur AB, on a la condition

$$\frac{\alpha x'}{a^2} + \frac{\beta y'}{b^2} = 1. \tag{4}$$

L'équation du premier lieu de la question résulte de l'élimination de x', y' entre les trois dernières équations. De (2) et (4), on déduit

$$x' = \frac{a^2(\beta - y)}{\beta x - \alpha y}, \quad y' = -\frac{b^2(\alpha - x)}{\beta x - \alpha y}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans (3), il vient

$$(\beta x - \alpha y)(x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y) + c^2(x - \alpha)(y - \beta) = 0. \tag{5}$$

2° L'équation générale des coniques homofocales à C est

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1. \tag{6}$$

Les coordonnées du point de contact d'une tangente menée du point (α, β) vérifient l'équation

$$\frac{\alpha x}{a^2 - \lambda} + \frac{\beta y}{b^2 - \lambda} = 1. \tag{7}$$

Pour obtenir le lieu de ce point de contact, il suffit d'éliminer λ entre les relations (6) et (7). En soustrayant celles-ci l'une de l'autre, on trouve

$$\frac{x^2 - \alpha x}{a^2 - \lambda} = \frac{-y^2 + \beta y}{b^2 - \lambda} = \frac{x^2 - \alpha x + y^2 - \beta y}{(a^2 - \lambda) - (b^2 - \lambda)},$$

d'où

$$a^2 - \lambda = \frac{c^2(x^2 - \alpha x)}{x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y}, \quad b^2 - \lambda = \frac{-c^2(y^2 - \beta y)}{x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (6), on retrouve l'équation (5).

3° L'équation (5) se décompose lorsque $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, c'est-à-dire si la droite AB est parallèle à l'un des axes de C. Dans le cas de $\beta = 0$, on trouve

$$y = 0, \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - x\left(\alpha + \frac{c^2}{\alpha}\right) + c^2 = 0;$$

donc le lieu se compose de l'axe des x, et d'une circonférence qui a son centre sur cet axe et qui passe par le pôle de AB.

F. Pisani,
Professeur à Messine.

NOTE. — Le lieu se réduit encore à une courbe du second degré, lorsque la droite AB est un diamètre de C ou que le point (α, β) est transporté à l'infini, dans une direction déterminée. En effet, remplaçons dans l'équation (5), α et β par $r\cos\lambda$ et $r\sin\lambda$, divisons le résultat par r^2 et posons ensuite $r = \infty$; il vient

$$(x\sin\lambda - y\cos\lambda)(x\cos\lambda + y\sin\lambda) = c^2\sin\lambda\cos\lambda,$$

équation d'une hyperbole équilatère dont les asymptotes, représentées par

$$x\sin\lambda - y\cos\lambda = 0, \qquad x\cos\lambda + y\sin\lambda = 0,$$

sont, respectivement, parallèle et perpendiculaire à la direction fixe des tangentes menées aux coniques homofocales.

La question 15 nous rappelle la suivante qui a été proposée au Concours général de 1840 (France). *Etant donnée une série de coniques homofocales, trouver* 1° *le lieu des points de contact des tangentes menées par un point donné* P ; 2° *le lieu des points d'incidence des normales menées par ce point ;* 3° *le lieu des projections de* P *sur ses polaires par rapport aux différentes coniques.*

Ces trois lieux sont identiques. Pour le faire voir, il suffit de généraliser la propriété fondamentale de la tangente à une conique, en présentant la démonstration de la manière suivante. La tangente et la normale, au point M (x', y') de la courbe (1), ont pour équations

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1, \qquad y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x'). \tag{8}$$

Elles rencontrent l'axe des x en deux points ayant pour abscisses $\frac{a^2}{x'}$, $\frac{c^2x'}{a^2}$.

Le produit de ces abscisses étant égal à c^2, la tangente et la normale sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites MF, MF', et comme elles sont rectangulaires, elles coïncident avec les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle FMF'.

On n'a pas fait usage de la condition que le point $(x'\ y')$ se trouve sur la conique. Par suite, en tenant compte de la signification générale des équations (8), on voit que *la polaire p d'un point quelconque* M *par rapport à une conique* C, *et la perpendiculaire p' abaissée de* M *sur p sont les bissectrices des angles formés par les droites qui joignent leur point d'intersection* N *aux foyers* F, F'.

On peut décrire une ellipse et une hyperbole ayant pour foyers F, F' et passant par N. D'après le théorème qui précède, la tangente et la

normale à ces courbes, au point N, se confondent avec les droites p et p',

Si l'on substitue à C une conique quelconque homofocale, la polaire p de M change (en restant tangente à une parabole fixe); mais la droite p' continuera à être tangente à une courbe, et à être normale à une autre courbe homofocale à C, au point où p' rencontre p. De là résulte l'identité des trois lieux proposés au concours de 1840.

Le théorème de M. Miller se déduit des mêmes considérations : car les polaires des différents points de AB passent par un point fixe, le pôle de AB par rapport à C.

Le lieu (5) est une strophoïde oblique (*). D'après les développements donnés ci-dessus, cette courbe peut être définie de bien des manières. Ainsi *la strophoïde est le lieu des sommets des triangles construits sur une base fixe* FF' *et tels que l'une des bissectrices de l'angle du sommet passe par un point fixe* P ; *elle est aussi le lieu des points d'intersection des tangentes menées de deux points fixes* F, F' *à un cercle de centre fixe* P *et de rayon variable. Étant donnés une involution rectiligne et un faisceau de droites, le lieu de la projection d'un point de l'involution sur le rayon qui passe par son homologue, est une strophoïde, etc.* (J. N.)

×Question 20.

Trouver, dans le plan d'un triangle ABC, *un point* X *tel que les trois parallèles aux côtés menées par* X *et limitées au périmètre de* ABC, *soient égales entre elles. Démontrer que l'inverse de la longueur commune de ces parallèles est égale à la demi-somme des inverses des côtés du triangle. Examiner le nombre des solutions.* (J. Neuberg.)

Soient : a, b, c les côtés du triangle; h_a, h_b, h_c les hauteurs; α et α', β et β', γ et γ' les segments dans lesquels les parallèles aux côtés menées par X partagent les hauteurs, d la longueur commune de ces parallèles. Le point X étant supposé intérieur au triangle ABC, on a

$$\frac{d}{a}=\frac{\alpha}{h_a}=1-\frac{\alpha'}{h_a},\quad \frac{d}{b}=\frac{\beta}{h_b}=1-\frac{\beta'}{h_b}\ldots, \qquad (1)$$

(*) Pour la démonstration analytique de ce théorème, voir Briot et Bouquet, *Géométrie analytique*, coordonnées polaires; pour une démonstration géométrique, voir dans les *Nouvelles Annales*, années 1874, une Étude de M. Maleyx sur la strophoïde.

d'où

$$d\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3-\left(\frac{\alpha'}{h_a}+\frac{\beta'}{h_b}+\frac{\gamma'}{h_c}\right). \qquad (2)$$

L'égalité

$$\frac{ABX}{ABC}+\frac{BCX}{ABC}+\frac{CAX}{ABC}=1$$

donne aussi

$$\frac{\alpha'}{h_a}+\frac{\beta'}{h_b}+\frac{\gamma'}{h_c}=1. \qquad (3)$$

Des relations (2) et (3), on conclut

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right). \qquad (4)$$

Remarque. Sans développer davantage cette solution, je signalerai encore les relations suivantes

$$(5) \qquad d=\frac{2S}{h_a+h_b+h_c}, \qquad \alpha a^2=\beta b^2=\gamma c^2. \qquad (6)$$

La dernière s'obtient par l'élimination de d entre les équations (1), considérées deux à deux. (H. Brocard.)

Autre solution par M. Pisani, qui nous a aussi envoyé des solutions des questions 28 et 30.

NOTE.

On obtient facilement le point X, lorsqu'on connaît la longueur d. La construction de d peut se déduire de la formule (5) ou de la formule (4) mise sous la forme

$$d=\frac{2bc}{\frac{bc}{a}+b+c}.$$

Le point X qu'on trouve ainsi sera intérieur au triangle ABC, si d est plus petit que chacun des côtés a, b, c. Soit $a<b<c$. Alors il suffit de poser $d<a$, ou, ce qui revient au même, $h_a<h_b+h_c$; c'est-à-dire, les hauteurs de ABC doivent être les côtés d'un second triangle.

Examinons les cas où le point X est extérieur au triangle ABC. Si

une parallèle à BC, de longueur d, est placée entre les côtés de l'angle A, mais extérieurement au triangle, on a

$$\frac{d}{a} = 1 + \frac{\alpha'}{h_a};$$

si cette parallèle est menée dans l'angle, opposé au sommet, de BAC, on trouve

$$\frac{d}{-a} = 1 - \frac{\alpha'}{h_a}.$$

Par conséquent, les formules (1) sont encore applicables, pourvu que l'on convienne : 1° de changer les signes des quantités α', β', γ' lorsque le point X n'est pas, par rapport aux droites BC, CA, AB du même côté que le sommet opposé; 2° de faire précéder a, b, c du signe + ou du signe —, suivant qu'une parallèle à l'un de ces côtés est comprise dans l'angle opposé à ce côté ou entre les prolongements des côtés de l'angle. Mais avec la première convention, la relation (3) est générale; par suite, la question admet autant de solutions qu'il y a de valeurs positives dans l'expression

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pm a} + \frac{1}{\pm b} + \frac{1}{\pm c}\right).$$

Si $a < b < c$, on a les quatre valeurs admissibles

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right),$$

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \quad \frac{1}{d} = \pm\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right);$$

dans la dernière, on prendra + ou —, suivant que $h_a \lessgtr h_b + h_c$ (*).

Une solution très élégante peut se déduire des formules (6). Soit A'B'C' le triangle qu'on obtient en menant par A, B, C des parallèles à BC, CA, AB. Nous aurons

$$a \cdot XB'C' = b \cdot XC'A' = c \cdot XA'B';$$

donc les droites A'X, B'X, C'X divisent les côtés du triangle A'B'C'

(*) M. Pisani, dans la solution qu'il nous a envoyée, signale ces diverses valeurs possibles de d.

en parties inversement proportionnelles aux côtés adjacents. Autrement dit, le point X est le centre de gravité de masses proportionnelles à $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et attachées aux points A′, B′, C′. Les autres solutions de la question donnent lieu à des remarques analogues. (J. N.)

Questions 18, 59-61.

Ces quatre questions, ainsi que beaucoup d'autres semblables, sont résolues dans un Mémoire intitulé : ***Sur l'évaluation approchée des aires planes***, qui a été publié dans le tome V des ***Annales de la Société scientifique***, p. 231-291, et qui paraît en même temps comme Supplément au n° de septembre de ***Mathesis***. Il s'est glissé dans ce Mémoire quelques fautes que nous signalons ici : page 6, ligne dernière, lire $S = \frac{1}{3}(2M + m)$, au lieu de $\frac{1}{3}(M + m)$; page 15, ligne 4, en remontant, lire ***égale à***, au lieu de ***plus petit que***; page 36, dernière colonne, lire $t = S - 1336$, au lieu de $t = S - 134$. Les tableaux des pages 35 et 36 complètent et rectifient ceux qui ont été donnés p. 33 de ***Mathesis***.

RECTIFICATIONS.

Page 121. Dans l'inscription de la villa Albani, lire ***Caietanus*** à la place de ***Caetanus***, et ***philotechnos*** à la place de ***philotecnos***. Cette inscription se trouve sur une table rectangulaire de marbre, fixée dans la paroi, en face de la première rampe de l'escalier du palais de la villa Albani, actuellement possédée par M. le prince Torlonia, hors de la porte Salaria. (***Note communiquée par M. le Prince B. Boncompagni***).

Page 131, *ligne* 15. Au lieu de F et E, lire F de E.

Page 136. Une faute s'est glissée dans l'énoncé de la question 66. Au lieu de $\frac{ab}{q}$, on doit lire $\frac{ap}{q}$. Cette proposition de M. Catalan est déduite de la théorie des ovales de Descartes. Comme vérification, on peut prendre $p = 4$, $q = 6$, $c = 16$, $a = 27$, $b = -11$.

QUESTIONS D'EXAMEN.

Algèbre.

40. Démontrer que l'expression

$$(x^2 - yz)^3 + (y^2 - zx)^3 + (z^2 - xy)^3 - 3(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$$

est un carré parfait.

[L'expression est symétrique par rapport à x, y, z et peut s'écrire

$$\Sigma(x^2 - yz)[(x^2 - yz)^2 - (y^2 - zx)(z^2 - xy)] =$$
$$\Sigma(x^2 - yz)x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2.]$$

41. Vérifier les identités suivantes (*) :

A. $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2bc)^2$;

B. $(a^2 + ab + b^2)^2 = (a^2 + ab)^2 + (ab + b^2)^2 + (ab)^2$;

C. $(a^2 + ab + b^2)^2 = \frac{1}{2}[(a + b)^4 + a^4 + b^4]$;

D. $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)^2 = (ab + bc + ca)^2 + (a + b + c)^2(a^2 + b^2 + c^2)$

E. $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)^2 = (a^2 + ab + ac - bc)^2 +$
$[(a + b)(b + c)]^2 + [(b + c)(c + a)]^2$;

F $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^2 = [(a - b)(a - c)]^2 +$
$[(b - a)(b - c)]^2 + [(c - a)(c - b)]^2$;

G. $[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]^2 = 2[(a - b)^4 + (b - c)^4 + (c - a)^4]$.

[L'égalité B se ramène à la précédente, si l'on remarque que $2(a^2 + ab + b^2) = a^2 + b^2 + (a + b)^2$. — Pour démontrer D et E, on peut transposer le premier terme du 2^{me} membre. On fait dépendre E et F de A en écrivant le premier membre sous la forme suivante : $\frac{1}{4}[(a \pm b)^2 + (b \pm c)^2 + (c \pm a)^2]^2$. — On déduit G de C en remplaçant d'abord $a^2 + ab + b^2$ par $\frac{1}{2}[a^2 + b^2 + (a + b)^2]$, et ensuite a, b, $a + b$ par $a - b$, $b - c$, $a - c$.]

42. Vérifier l'identité

$$9(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^2 = (2a - b - c)^2(2b - c - a)^2$$
$$+ (2b - c - a)^2(2c - a - b)^2 + (2c - a - b)^2(2a - b - c)^2.$$

(J. N.)

(*) Ces identités conduisent à des propositions intéressantes sur les nombres.

SUR LE CENTRE DES MÉDIANES ANTIPARALLÈLES.

Le point du plan d'un triangle ABC, dont les distances aux côtés sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés, jouit d'une foule de propriétés qui le placent au nombre des points *remarquables* du triangle. Il nous a paru intéressant de réunir les éléments d'une étude sur ce point dont l'importance s'accentue tous les jours. Pour abréger le discours, nous le désignerons simplement par la lettre K.

1. *K est le point dont la somme des carrés des distances aux côtés de* ABC *est minimum* (*).

Soient a, b, c, S les côtés et l'aire de ABC, x, y, z les distances d'un point quelconque à ces côtés. On a l'identité

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$$

Mais

$$ax + by + cz = 2S;$$

par conséquent, le mininum de $x^2 + y^2 + z^2$ a lieu lorsque les carrés qui entrent dans le 2e membre de l'identité sont nuls ou que

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}, \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{2}$$

2. Construisons, sur les côtés de ABC, trois carrés extérieurs; soit A'B'C' le triangle formé par les côtés de ces carrés, parallèles à BC, CA, AB. K *est le centre de similitude des triangles* ABC, A'B'C' (**); car la droite AA', par exemple, est le lieu des points dont les distances à AB, AC sont proportionnelles à b, c.

On peut aussi remplacer les carrés extérieurs par les carrés construits intérieurement sur les côtés de ABC.

3. Les distances du centre de gravité G de ABC aux côtés de ce triangle sont inversement proportionnelles à ces côtés, celles de K sont

(*) Cette propriété paraît être due à Gauss. Pour une autre démonstration, voir CATALAN, *Théorèmes et problèmes*, 6me édition, p. 231.

(**) D'après cette propriété, signalée pour la première fois par le géomètre allemand GREBE (*Archives de Grunert*, t. VIII), le point K est souvent désigné sous le nom de *point de Grebe*.

directement proportionnelles à ces côtés. On déduit de là que *les symétriques des médianes* AG, BG, CG, *par rapport aux bissectrices* AI, BI, CI *des angles du triangle, concourent au point* K (*).

La droite AK divise, évidemment, en parties égales la symétrique de BC par rapport à AI, symétrique qui est antiparallèle à BC relativement à l'angle BAC. On peut donc dire que AK, BK, CK *sont les médianes antiparallèles du triangle* ABC (**).

Soient AH_a, BH_b, CH_c les hauteurs du triangle ABC, H leur point de concours ou l'*orthocentre* de ABC (***). La droite H_bH_c étant antiparallèle à BC par rapport à l'angle A, on voit que *les droites qui joignent les sommets d'un triangle* ABC *aux milieux des côtés correspondants du triangle orthocentrique* $H_aH_bH_c$ *concourent au point* K.

4. Soient K_a, K_b, K_c les pieds des médianes antiparallèles. On trouve facilement que

$$\frac{BK_a}{CK_a} = \frac{\text{aire BKA}}{\text{aire CKA}} = \frac{c^2}{b^2};$$

donc *les médianes antiparallèles partagent les côtés de* ABC *dans le rapport des carrés des côtés adjacents.* Autrement dit, *le point* K *est le centre de gravité de trois masses proportionnelles à* a^2, b^2, c^2 *et attachées aux points* A, B, C.

Remarquons aussi que

$$\frac{KK_a}{AK_a} = \frac{\text{aire BKC}}{\text{aire BAC}} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, \quad AK_a = \frac{2bc}{b^2+c^2} AG_a \text{ (****)},$$

G_a, G_b, G_c étant les milieux des côtés de ABC. (*A continuer.*)

(*) En général, G étant un point *quelconque*, les symétriques des droites AG, BG, CG par rapport à AI, BI, CI concourent en un même point G'. Les points G, G' sont appelés *points argusiens* ou mieux *points isogonaux*.

(**) Les termes de médiane antiparallèle et de centre des médianes antiparallèles ont été proposés par M. E Lemoine. Voir *Nouvelles Annales*, année 1873, p. 364, ou *Séances des Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences*, 1873 et 1874.

(***) Néologisme dû à James Booth.

(****) Si K', G' sont les points d'intersection des droites AK, AG, par la circonférence ABC, on trouve facilement

$$\frac{AK_a}{AG_a} = \frac{\sqrt{AK_a \cdot K_aK'}}{\sqrt{AG_a \cdot G_aG'}} = \frac{\sqrt{BK_a \cdot CK_a}}{\sqrt{BG_a \cdot CG_a}}.$$

Cette relation convient à deux droites quelconques, symétriques par rapport à AI.

NOTES MATHÉMATIQUES.

9. ***Sur les solutions singulières des équations différentielles totales.*** M. Bertrand a donné le premier, croyons-nous, dans son *Calcul différentiel*, n° 217, une équation différentielle totale

$$(z-y)\,dx + x\,dy + (y-z)\,dz = 0,$$

dont l'intégrale

$$z - x - y = 0$$

ne contient pas de constante arbitraire. M. J. Petersen vient de faire connaître un nouvel exemple, beaucoup plus général, présentant la même particularité, dans le *Journal de Zeuthen*, 4me série, t. II, p. 170-171. La condition d'intégrabilité de l'équation

$$\left(\varphi^2 + \frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \left(\varphi + \frac{d\varphi}{dy}\right)dy + \frac{d\varphi}{dz}\,dz = 0$$

où φ est une fonction quelconque de x, y, z, est

$$\varphi^2 \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

qui n'est vérifiée que si $\varphi = 0$. La seule solution de l'équation est donc $\varphi = 0$, qui ne contient pas de constante arbitraire. (P. M.)

10. ***Sur les foyers des courbes planes.*** D'après Plücker, le foyer d'une courbe (plane) est le point d'intersection des tangentes à la courbe, ayant, en coordonnées rectangulaires, $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ pour coefficients de direction. Analytiquement parlant, ces droites sont dites perpendiculaires à elles-mêmes, puisque $1 + \sqrt{-1}\sqrt{-1} = 0$. Les deux tangentes imaginaires à une courbe plane, dont l'intersection détermine un foyer, sont donc aussi normales à cette courbe, et, par suite, elles sont tangentes à la développée. Donc, le foyer considéré est aussi un foyer de cette développée. De même, tout foyer de la développée est un foyer de la développante. Donc, ***une courbe plane, ses développées et ses développantes successives ont en commun tous leurs foyers situés à une distance finie.*** (D'après MM. E. Gibert et B. Niewenglowski, *Comptes rendus* du 17 avril 1876).

Si nos souvenirs sont exacts, Salmon fait quelque part allusion à cette curieuse propriété; mais en tout cas, elle est assez peu connue pour mériter d'être signalée une fois de plus. (P. M.)

11. *Sur la puissance d'un point par rapport à une conique.* Un de nos abonnés, M. G. T. d'Alger, nous fait observer que les théorèmes énoncés dans la Note de M. Barbarin (*Mathesis*, pp. 85-87) résultent immédiatement du § 387 du *Traité des sections coniques*, par Chasles. C'est parfaitement exact, mais la forme élémentaire même de la note de M. Barbarin nous a déterminés à l'insérer, et nous avons cru répondre au programme de la *Mathesis* en attirant l'attention des élèves sur une notion qui est ordinairement négligée dans les cours de géométrie analytique. D'ailleurs, on sait qu'il n'est pas facile, en général, d'étudier un point spécial dans le *Traité des sections coniques* de l'illustre géomètre français. « On a remarqué que chez certains poètes, chez Lucrèce, par exemple, l'enchaînement continu des idées est tel que l'on est aussi peu tenté d'en arracher un vers pour le citer seul, que de détacher une feuille d'un arbre ou un flot de la mer. *L'ouvrage de M. Chasles mérite la même louange et le même reproche.* » L'auteur « dispose les matières avec tant d'ordre, ses méthodes se développent avec tant de continuité, comme les anneaux d'une même chaîne, et s'étendent si naturellement en s'appuyant sur les mêmes principes depuis le premier chapitre du *Traité de géométrie supérieure* jusqu'à la dernière page de la *Théorie des sections coniques*, qu'un lecteur, fût-il des plus habiles, qui, pour mieux s'attacher aux grandes questions, prétendrait négliger les moindres, serait exposé à ne rien comprendre tant qu'il se refuserait à lire l'ouvrage entier, chapitre par chapitre, et avec une exacte attention » (J. BERTRAND, *Journal des Savants*, 1866, p. 67).

12. *Sur les carrés égaux à la somme de plusieurs carrés.* On connaît les identités

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 = a^2(a + b)^2 + b^2(a + b)^2 + a^2b^2,$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)^2 =$$

$$a^2(a + b + c)^2 + b^2(a + b + c)^2 + c^2(a + b + c)^2 + (ab + ac + bc)^2.$$

M. G. Dostor nous en communique la généralisation suivante. *Soient* $a, b, c, \ldots, l$, $(n - 1)$ *quantités quelconques; on a la formule*

$$(a^2 + b^2 + c^2 + \cdots + ab + ac + bc + \cdots)^2 =$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + \cdots)(a + b + c + \cdots)^2 + (ab + ac + bc + \cdots)^2,$$

où le second membre est la somme de n carrés.

En effet (*),

$$\Sigma a^2 + \Sigma ab = \Sigma^2 a - \Sigma ab,$$

$$(\Sigma a^2 + \Sigma ab)^2 = \Sigma^4 a + \Sigma^2 ab - 2\Sigma^2 a \cdot \Sigma ab. \qquad (1)$$

Mais

$$\Sigma^4 a = \Sigma^2 a \cdot (\Sigma a^2 + 2\Sigma ab);$$

substituons cette valeur dans l'égalité (1), etc.

Peut-on, de même, généraliser la formule suivante, due à M. Catalan ?

$$(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)^2 =$$

$$(a^2 + ab + ac - bc)^2 + [(a + b)(b + c)]^2 + [(a + c)(b + c)]^2.$$

×**13.** *Décomposition d'une somme de n carrés en une somme de n ou de* $(n + 1)$ *autres carrés, par* M. Dostor. Soient $a, b, c, \ldots, k, l, n$ quantités quelconques. On trouve, p étant arbitraire,

$$\Sigma (p - a)^2 = \Sigma a^2 + np^2 - 2(a + b + c + \cdots + k + l)p,$$

et si

$$2(a + b + c + \cdots + k + l) = np,$$

$$a^2 + b^2 + \cdots + l^2 = (p - a)^2 + (p - b)^2 + \cdots + (p - l)^2.$$

Quand l est nul, il vient,

$$a^2 + b^2 + \cdots + k^2 = p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + \cdots + (p - k)^2,$$

relation qui généralise une identité due à M. E. Catalan (*Nouv. Corresp. math.*, IV, p. 353) (**).

×**14.** *Expressions simples des volumes de deux corps de révolution.* Nous recommandons à nos jeunes lecteurs, comme exercice utile et intéressant, le théorème suivant qui nous a été communiqué par M. Dostor.

D'un point A, *extérieur à un cercle* O, *on mène la tangente* AD, *dont le point de contact est* D, *et le diamètre dont les extrémités sont* B *et* C. *Si l'on fait tourner la figure autour de* AO, *les deux triangles mixtilignes*

(*) *Plus simplement*, transposons le dernier terme du deuxième membre, etc. (J. N.)

(**) Soient A, B, C,... L, n points en ligne droite, O leur centre des moyennes distances, P et Q deux points symétriques par rapport à O. Les identités du n° 13 correspondent aux égalités

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \cdots + \overline{PK}^2 = \overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 + \cdots + \overline{QK}^2.$$

(J. N.)

ADB *et* ADC *engendrent des volumes qui sont équivalents aux deux cônes, ayant pour rayons de base respectifs les deux segments* AB *et* AC *de la sécante centrale, et pour hauteur commune la projection du rayon de contact* OD *sur cette sécante.*

Ce théorème conduit rapidement à l'expression du volume compris entre deux sphères et le cône circonscrit.

15. *Sur les centres des parallèles égales.* Lorsque nous avons proposé la question 20, nous ignorions qu'elle avait déjà été traitée, en partie(*), par M. E. Hain dans les *Archives de Grunert-Hoppe*, t. 57, p. 440, et t. 61, p. 257.

Les développements donnés dans la *Mathesis*, p. 148-151, peuvent se résumer comme il suit : *Soient* A_1, B_1, C_1 *les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle* ABC, A_2, B_2, C_2 *ceux des bissectrices extérieures,* A'B'C' *le triangle que forment les parallèles aux côtés de* ABC, *menées par les sommets opposés. Les droites* $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ *se coupent en un point* X *tel que les parallèles menées par* X *aux côtés de* A'B'C' *et limitées aux angles opposés sont égales entre elles; les distances de ce point aux côtés de* A'B'C' *sont inversement proportionnelles aux carrés de ces côtés. Les points d'intersection des systèmes de droites* ($A'A_1$, $B'B_2$, $C'C_2$), ($A'A_2$, $B'B_1$, $C'C_2$), ($A'A_2$, $B'B_2$, $C'C_1$) *jouissent de propriétés analogues. Les droites* $A'A_1$, $A'A_2$ *sont le lieu géométrique d'un point tel que les parallèles aux côtés de l'angle* A *du triangle* ABC *passant par ce point et comprises entre les côtés des angles* B *et* C, *sont égales entre elles.* (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Traité de Géométrie descriptive par N. Breithof, professeur à la faculté des sciences de l'Université de Louvain. Première partie : point, ligne droite, plan. Seconde édition. Paris, Gauthier-Villars; Louvain, Peeters; Mons, Manceaux; 1880. Texte, 234 p. in-8°; atlas, 37 planches in-4°. Prix : 7 francs.

(*) M. Hain ne signale qu'un seul centre des parallèles égales. Nous proposons de nommer *conjugués isotomiques* par rapport à un triangle deux points tels que les droites qui les joignent à un sommet quelconque du triangle rencontrent le côté opposé en deux points équidistants du milieu de ce côté. D'après cela, les centres des parallèles égales, du triangle ABC, sont les conjugués isotomiques, par rapport au triangle A'B'C', des centres des cercles inscrit et exinscrits à A'B'C'.

Cet ouvrage, qui se recommande par une grande clarté, présente, avec tous les développements nécessaires, les connaissances de géométrie descriptive, exigées des candidats aux écoles spéciales.

L'auteur expose d'abord, d'une manière complète, la représentation du point, de la droite, du plan dans le système des projections sur deux plans rectangulaires ; il examine toutes les positions particulières de ces éléments par rapport aux plans de projection, leurs positions mutuelles, et les couples d'éléments symétriques.

Il passe ensuite à la résolution des problèmes. Ici, pour l'ordre des matières, il s'est principalement inspiré de l'excellent *Programme* de son ancien professeur de Liége, feu Brasseur ; toutefois, il le complète en ajoutant les cas particuliers remarquables, quelques problèmes réciproques et de nouvelles questions.

Trois chapitres spéciaux sont consacrés aux méthodes des rabattements, des changements de plans de projection, et des rotations. M. Breithof établit les principes fondamentaux de ces méthodes et les applique à la recherche des distances et des angles.

Nous venons de donner une analyse rapide de ce qui se rapporte au programme d'admission aux écoles spéciales. Le reste de l'ouvrage contient la résolution du trièdre, quelques questions bien choisies sur les polyèdres et une théorie complète des projections côtées, dans laquelle sont résolus de nouveau les principaux problèmes relatifs à la droite et au plan.

Pour faciliter l'étude, l'auteur sépare, dans la plupart des questions, la solution dans l'espace de la solution graphique, et représente la première par la méthode des projections obliques. Cette méthode d'enseignement sera favorablement accueillie des étudiants qui éprouvent quelque difficulté à *voir dans l'espace.*

Leçons de Géométrie descriptive, sur le point, la droite et le plan, par J. F. De Moor, professeur à l'Athénée de Liége. Nouvelle édition. Bruxelles, Ramlot ; Gand, Hoste. Texte, 100 p., in-8° ; Atlas, 31 planches. Prix : 4 francs.

Pour l'enseignement de la géométrie descriptive, la plupart des professeurs des athénées et des collèges n'adoptent pas de manuel ou bien ils prennent pour guide les leçons de Lefébure de Fourcy, qui sont écrites dans un style clair et simple, mais qui présentent çà et là des lacunes.

Le livre dont M. De Moor vient de publier une nouvelle édition est destiné à faciliter la tâche de nos collègues. Sous un format modeste, et dans un langage clair et concis, il donne tous les développements désirables sur les différentes parties du programme : Positions particulières par rapport aux plans de projection et positions relatives des points, des droites et des plans, plans à mener, intersections, droites à mener, changements de plans de projection, rotations, rabattements et redressements, perpendiculaires et distances, angles plans, dièdres et trièdres.

Pour l'ordre des matières et pour beaucoup de détails, M. De Moor s'est inspiré principalement du cours professé à l'Université de Gand par M. Verstraeten. C'est

là un avantage qui sera apprécié tant par nos collègues sortis de l'école normale, que par les étudiants qui se préparent aux écoles spéciales de Gand (*).

Leçons de Géométrie descriptive rédigées d'après le programme d'admission à l'école militaire, à l'école polytechnique, etc., par ALGRAIN, Capitaine du Génie, ancien répétiteur à l'école militaire de Belgique. Anvers, chez l'auteur (rue Lozane, 118), 1880. Un vol in-8° de 115 pages et un atlas de 19 planches. Prix : 5 francs.

Ces leçons s'adressent spécialement aux candidats à l'école militaire; cependant, elles conviennent très bien aussi aux autres étudiants. Rédigées avec beaucoup de soin et une grande simplicité, elles sont très propres à aplanir rapidement les difficultés qu'éprouvent la plupart de ceux qui abordent la géométrie descriptive. Sans être aussi étendues que les cours de MM. Breithof et De Moor, elles ne négligent aucune partie essentielle du programme.

L'ordre suivi est celui du programme des connaissances exigées pour l'admission à l'école militaire. I. Définitions et conventions. Du point. II. De la ligne droite. III. Du plan. IV. Intersection de deux plans. V. Intersection d'une droite et d'un plan. VI. Rabattements, rotations et changements de plans de projection. VII. Distances de deux points, de deux droites, etc. VIII. Angles de deux droites ou d'une droite et d'un plan.

Nous profitons de l'occasion que nous offrent les trois comptes-rendus précédents pour signaler un autre manuel contenant à peu près les matières enseignées à l'école des Arts et Manufactures de Gand. Il a pour titre : *Cours élémentaire de géométrie descriptive* précédé de Notions sur les Courbes usuelles et suivi d'Applications aux Machines, au tracé des Ombres et à la Perspective, par H. SCHOENTJES, répétiteur à l'Université de Gand. Gand, Waem-Lienders, 1878. Un volume in-8° de XI-155 pages et un atlas de 23 planches. Prix : 7 fr. 50.

Éléments de Géométrie conformes aux derniers programmes officiels, renfermant un grand nombre d'exercices et suivis d'un complément à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales et de notions sur le

---

(*) M. De Moor emploie, comme M. Verstraeten, les désignations suivantes, usitées depuis longtemps dans les applications de la géométrie descriptive : Un plan parallèle au plan vertical s'appelle *plan de front;* une droite parallele au plan vertical, *droite de front;* un plan perpendiculaire à la ligne de terre, *plan de profil;* une droite située dans un pareil plan, *droite de profil*. D'après cela, les expressions *droite horizontale de front, droite horizontale de profil,* sont corrélatives du terme *verticale* et signifient respectivement une parallele à la ligne de terre et une perpendiculaire au plan vertical. (P. M.)

lever des plans et le nivellement, par E. Rouché, professeur à l'école centrale, répétiteur à l'école polytechnique, et Ch. De Comberousse, professeur à l'école centrale et au collège Chaptal. Troisième édition, entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars, 1881. Un volume in-8° de XXV-540 pages. Prix : 6 fr.

Les *Éléments de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse sont extraits du *Traité de Géométrie* si bien fait et si complet des mêmes auteurs. Nous les recommandons spécialement comme un excellent manuel aux professeurs de nos écoles moyennes et aux aspirants aux écoles spéciales, surtout à cause du *Complément* qui occupe les deux cent dernières pages du volume. Voici les matières qui sont traitées dans ce complément. *Géométrie plane.* 1. Transversales. 2. Divisions et faisceaux harmoniques. 3. Pôle et polaires dans le cercle. 4. Homothétie. 5. Axes radicaux. 6. Inversion. 7. Relations métriques entre les divers éléments d'un triangle. 8. Construction des formules algébriques. 9. Calcul de π. 10. Formule de Simpson (par la méthode exposée dans le n° de février 1881 de *Mathesis*). *Géométrie solide.* 1. Trièdres. 2. Figures tracées sur la sphère. 3. Figures symétriques 4 Homothétie. 5. Pôles et polaires; axes radicaux, inversion. 6. Volume du tronc de prisme, du tas de cailloux et du segment sphérique. 7. Sphère tangente à quatre plans. 8. Polyèdres réguliers. *Courbes usuelles.* 1. Ellipse. 2. Hyperbole. 3 Parabole. 4. Sections coniques. 5. Hélice.

Dans le premier livre des *Éléments*, les auteurs en sont revenus sur un point important à la tradition ancienne : ils *démontrent* maintenant, comme Euclide, au lieu de l'admettre comme un axiome ou une définition, que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. Toutes les difficultés relatives aux incommensurables sont rejetées dans deux notes à la fin du volume, ce que nous ne pouvons trop approuver. Enfin une dernière note contient des notions d'arpentage et de nivellement. Signalons encore une amélioration importante : c'est une Table des matières, dans laquelle toutes les propositions se trouvent énoncées in extenso et par ordre.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 22.

Si, après avoir rangé dans leur ordre de grandeur les fractions irréductibles dont le dénominateur n'excède pas un nombre entier donné, on prend à volonté dans la suite ainsi formée trois fractions consécutives,

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{A}{B},$$

on a

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha + A}{\beta + B}.$$

Ainsi, par exemple, si le dénominateur est inférieur à 8, *on trouve les fractions suivantes plus petites que l'unité et vérifiant le théorème :*

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}.$$

(J. Farey.)

Rangeons dans leur ordre de grandeur les fractions de dénominateur plus petit qu'un nombre d, et supposons que le théorème soit vrai pour celles-ci. Nous allons intercaler une fraction irréductible $\frac{c}{d}$ dans cette suite, et faire voir que le théorème ne cesse pas d'être vrai après cette intercalation. L'avant-dernière réduite de $\frac{c}{d}$ convertie en fraction continue étant $\frac{p}{q}$, on a $cq - dp = \pm 1$, soit par exemple :

$$cq - dp = 1. \tag{1}$$

Comme $q < d$, la fraction $\frac{p}{q}$ se trouve dans la suite donnée ; par conséquent $\frac{c}{d}$ prendra place immédiatement après $\frac{p}{q}$, car leur différence est $\frac{1}{dq}$, tandis que toute autre fraction, de dénominateur g, par exemple, prise dans la suite primitive, aura au moins avec $\frac{p}{q}$ la différence $\frac{1}{gq}$, qui est plus grande que $\frac{1}{dq}$.

De plus l'équation (1) peut s'écrire

$$d(c - p) - c(d - q) = 1, \tag{2}$$

d'où l'on voit, de la même manière, que la fraction $\frac{c}{d}$ sera suivie de $\frac{c-p}{d-q}$, irréductible d'après (2). Ainsi, pour les fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{c-p}{d-q}$ le théorème aura lieu.

Supposons enfin que, dans la suite des fractions données, $\frac{p}{q}$ soit précédée de $\frac{f}{g}$; nous aurons, d'après l'hypothèse,

$$\frac{p}{q} = \frac{f + (c - p)}{g + (d - q)};$$

il s'ensuit

$$\frac{p}{q} = \frac{f+c}{g+d},$$

de manière que l'intercalation de la fraction $\frac{c}{d}$ n'a rien changé dans la suite donnée, et le théorème se trouve ainsi démontré.

On voit d'ailleurs, que pour deux fractions consécutives quelconques de la suite en question, $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on aura toujours $cb - ad = 1$ (*).

A. F. PULLICH,
Professeur à l'école métropolitaine de Copenhague.

Question 41.

Sur les côtés d'un triangle $A_1A_2A_3$, *on construit, extérieurement, les carrés* $A_2B_1C_1A_3$, $A_3B_2C_2A_1$, $A_1B_3C_3A_2$, *ayant pour centres* I_1, I_2, I_3, *et, intérieurement, les carrés* $A_2b_1c_1A_3$, $A_3b_2c_2A_1$, $A_1b_3c_3A_2$ *ayant pour centres* i_1, i_2, i_3. *On propose* : 1° *de démontrer que le milieu de* B_2C_3 *est le centre commun de deux carrés construits sur* A_2A_3 *et sur* B_3C_2 ; 2° *de démontrer que les centres de gravité de deux triangles* $B_1B_2C_3$, $C_1B_2C_3$ (*ou* $b_1b_2c_3$, $c_1b_2c_3$) *divisent* A_2A_3 *en trois parties égales* ; 3° *de construire le triangle* $A_1A_2A_3$, *connaissant* : *a*) *les points* I_1, I_2, B_3 ; *b*) i_1, I_2, B_3 ; *c*) I_1, I_2, i_3 ; *d*) C_1, B_2, C_3. (H. VAN AUBEL.)

1° Soient M le milieu de B_2C_3 ; H, P, N, R, les projections des points A_1, C_3, M, B_2 sur le côté A_2A_3. Les deux triangles B_2RA_3, C_3PA_2 étant égaux, respectivement, aux deux triangles A_3HA_1, A_2HA_1, on a :

$$A_3R = A_2P = A_1H, \quad B_2R = A_3H, \quad C_3P = A_2H.$$

Donc le point N est le milieu de A_2A_3, et $2MN = B_2R + C_3P = A_2A_3$. Par suite, M est le centre du carré construit sur A_2A_3. On prouvera,

(*) CAUCHY, *Exercices de Mathématiques*, tome I, p. 114-116 donne, du théorème de Farey, une démonstration un peu moins simple que celle de M. Pullich. M. Glaisher a aussi démontré le théorème de Farey, dans un article inséré au *Philosophical Magazine*, de 1879, et que nous ne pouvons, pour le moment, comparer à la solution de M. Pullich. (P. M.)

de la même manière, que M est le centre du carré construit sur B_3C_3 (*).

2° Soit G le point d'intersection des droites MC_1 et A_2A_3. Les deux triangles MGA_3, C_1GA_2 sont semblables, et comme $MA_3 = \frac{1}{2} A_2C_1$, on aura $GC_1 = 2MG$, $A_2G = 2GA_3$. Donc le point G est le centre de gravité du triangle $C_1B_2C_3$ et il divise A_2A_3 dans le rapport de 2 : 1.

De même, le centre de gravité G' de $C_1B_3C_3$ divise A_3A_2 dans le rapport de 2 : 1.

3° *a*) Soit α_3 le centre du carré construit sur I_1I_2 : on sait que ce point coïncide avec le milieu de A_1A_2 (**). On peut construire le triangle rectangle $B_3A_1\alpha_3$, dont on connaît l'hypoténuse $B_3\alpha_3$, et le rapport $B_3A_1 : \alpha_3A_1 = 2$ des autres côtés. En prolongeant $A_1\alpha_3$ de $\alpha_3A_2 = A_1\alpha_3$, et en menant I_2A_3 perpendiculaire et égale à A_1I_2, on aura les deux autres sommets du triangle cherché.

b) On peut construire le carré $A_1B_3C_3A_2$ dont la diagonale A_1C_3 est parallèle à I_2i_1, et égale à $2I_2i_1$, etc.

c) Le centre du carré construit sur I_1I_2 coïncide avec le milieu α_3 de A_1A_2. Le symétrique de i_3, par rapport à α_3, donnera le point I_3, et l'on sera ramené à un problème connu.

d) Le centre de gravité G du triangle $C_1B_2C_3$ donne un point du côté A_2A_3. Les sommets A_3 et A_2 appartenant à des segments capables de 45°, construits sur MG; et G divisant A_2A_3 dans le rapport de 2 : 1, on peut obtenir les sommets A_2, A_3. Le troisième sommet du triangle cherché est à l'intersection des perpendiculaires élevées en A_2 et A_3 sur C_3A_2, B_2A_3.

REMARQUE. Voici deux autres propriétés de la même figure, qui, peut-être, n'ont pas encore été remarquées :

Soient D_1, D_2, D_3, les points d'intersection de B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3; H_1, H_2, H_3 les points de concours des hauteurs des triangles $D_1B_3C_2$, $D_2C_3B_1$, $D_3C_1B_2$. Il est facile de démontrer : 1° que les milieux des côtés du triangle $H_1H_2H_3$ coïncident avec les centres des carrés construits

---

(*) Il suffit de remarquer que la droite B_2C_3 joint les sommets des carrés construits sur deux côtés du triangle $A_1B_2C_2$. (J. N.)

(**) Voir *Nouvelle Correspondance*, t. IV, p. 142. Si α_1, α_2, α_3 sont les milieux des côtés du triangle $A_1A_2A_3$, les triangles $I_2\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1I_1$ ont deux côtés égaux et perpendiculaires; donc les troisièmes côtés $I_2\alpha_3$, α_3I_1 sont égaux et perpendiculaires. (J. N.)

sur les côtés de $A_1A_2A_3$; 2° que les droites D_1H_1, D_2H_2, D_3H_3 sont les médianes du triangle $D_1D_2D_3$.

On déduit, de la première partie, le moyen de construire le triangle $A_1A_2A_3$, connaissant H_1, H_2, H_3.

EDM. VAN AUBEL,
Élève à l'athénée de Liége.

Question 48.

Trouver, par des formules directes, une infinité de valeurs entières de x, y, z, telles que l'expression

$$2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

se réduise à un carré pair, assigné d'avance. (S. REALIS.)

Solution de M. ROCHETTI, *professeur à Messine et de* M. P. VISALLI SAYA, *élève à l'université de Messine.* Posons

$$2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) = 4n^2.$$

Résolvons cette équation par rapport à z :

$$z = x + y \pm 2\sqrt{xy - n^2}.$$

La valeur de z sera entière, si $xy - n^2$ se réduit à un carré c^2. En posant $c = 0$, nous avons, *au moins*, les solutions

$$x = n, \quad y = n, \quad z = 2n; \qquad x = 1, \quad y = n^2, \quad z = n^2 + 1.$$

Pour une valeur quelconque de c, nous avons, au moins, la solution

$$x = 1, \quad y = n^2 + c^2, \quad z = n^2 + (c \pm 1)^2.$$

Il est facile d'ailleurs de trouver toutes les solutions de l'équation $xy = n^2 + c^2$, en décomposant $n^2 + c^2$, en deux facteurs de toutes les manières possibles, c prenant les valeurs 1, 2, 3, etc.

NOTE. On obtient pour x, y, z, des valeurs qui sont des sommes de deux carrés, en posant

$$n^2 + c^2 = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = (pr \pm qs)^2 + (ps \mp qr)^2.$$

On choisira pour p, q, r, s des valeurs telles que $n = pr \pm qs$, et l'on aura les formules

$$x = p^2 + q^2, \quad y = r^2 + s^2,$$
$$z = (p + s)^2 + (q \pm r)^2 \quad \text{ou} \quad (p - s)^2 + (q \pm r)^2,$$

qui résolvent l'équation proposée.

Voici quelques systèmes de solutions de ce genre que l'on peut

déduire des formules précédentes. Ils nous ont été communiqués par M. S. Realis :

I. $p = a,\quad q = b + c,\quad r = b,\quad s = -(a + c),$
$x = a^2 + (b + c)^2,\quad y = b^2 + (a + c)^2,\quad z = 2c^2,$
$n = c(a + b + c).$

II. $p = a,\quad q = b + c,\quad s = b,\quad r = -(a + c)$
$x = a^2 + (b + c)^2,\quad y = b^2 + (a + c)^2,\quad z = 2(a^2 + b^2)$
$n = a^2 + (a + b)c + b^2.$

III. $p = a,\quad q = b + c,\quad r = -a,\quad s = b - c,$
$x = a^2 + (b + c)^2,\quad y = a^2 + (b - c)^2,\quad z = 2[(a - c)^2 + b^2],$
$n = a^2 + b^2 - c^2.$

Ces trois systèmes de solutions sont distincts ; chacun d'eux renferme pour toute valeur de n, une infinité de solutions particulières qui ne sont pas fournies par les deux autres. (J. N.)

Question 55.

Si, sur les côtés BC, CA *d'un triangle* ABC, *on construit extérieurement et, sur le troisième côté* BA *intérieurement, les triangles* BB'C, CC'A, BA'A *semblables à un triangle donné, la figure* B'CC'A' *est un parallélogramme.*

(H. Van Aubel.)

Les triangles semblables BB'C, BA'A donnent

angle B'BA' = CBA, B'B : BC = A'B : BA ;

par conséquent, les triangles B'BA', CBA sont également semblables et l'inclinaison des côtés homologues A'B', AC est égale à l'angle A'BA qui, par hypothèse, est égal à C'CA. Donc les droites A'B', CC' sont parallèles. Un raisonnement analogue, appliqué à C'CA, A'BA fait voir que les droites CB', C'A' sont parallèles. Par suite, la figure B'CC'A' est un parallélogramme.

Pierre Interdonato,
Élève de l'école des ingénieurs à Naples.

Des solutions des questions 55 et 56 nous ont été envoyées par MM. Rochetti, Pisani et Duyckaerts. M. Lambert, du collége de St Trond, les a résolu par la trigonométrie M. Pisani fait remarquer que la proposition 55 résulte de la proposition 56, si l'on fait coïncider deux sommets du quadrilatère.

Note. Construisons le parallélogramme BA'AA'', ayant pour centre le milieu M de AB, et soit N le centre du parallélogramme B'CC'A'. Dans le triangle CA'A'', les médianes CM, A''N se coupent mutuellement dans le rapport 2 : 1 ; mais ces droites sont aussi médianes des triangles

ABC, A''B'C'. Par conséquent : *Si, sur les côtés d'un triangle* ABC, *l'on construit les triangles semblables et semblablement orientés* BB'C, CC'A, AA''B, *les triangles* A''B'C', ABC *ont même centre de gravité.*

Plus généralement : *Si, sur les côtés d'un polygone plan* $A_1A_2\ldots A_n$, *on construit les triangles semblables et semblablement orientés* $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3\ldots A_nB_nA_1$, *les centres des moyennes distances des deux systèmes de points* $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$ *coïncident.* En effet, soient α_i, β_i les distances des points A_i, B_i à un axe quelconque, et supposons la proposition vérifiée pour les polygones de $n-1$ côtés $A_1A_2\ldots A_{n-1}$, $B_1B_2\ldots B'_{n-1}$, B'_{n-1} étant le sommet du triangle $A_{n-1}B'_{n-1}A_1$ semblable à $A_1B_1A_2$. Nous aurons

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-2} + \beta'_{n-1}.$$

La figure $A_nB_nB'_{n-1}B_{n-1}$ étant un parallélogramme, on a aussi

$$\alpha_n + \beta'_{n-1} = \beta_{n-1} + \beta_n,$$

d'où, en ajoutant, etc.

Dans la *Nouvelle correspondance mathématique*, t. VI, p. 473, nous avions signalé la proposition précédente, ignorant qu'elle avait déjà été publiée, en 1877, par M. Laisant (Congrès du Havre). Elle nous avait été suggérée par un passage de l'*Aperçu historique* (p. 44), dans lequel Chasles mentionne la même proposition pour le cas où les points B divisent les côtés du polygone $A_1A_2\ldots A_n$ dans un même rapport. Quoi qu'il en soit, M. Resal (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, août 1881) vient, de nouveau, d'attirer l'attention des géomètres sur ce cas particulier, n'ayant, sans doute, aucune connaissance de la belle généralisation, due à M. Laisant. (J. N.)

Question 58.

Si, sur deux côtés opposés AB, CD *d'un quadrilatère* ABCD, *on construit extérieurement, et sur les deux autres côtés* BC, DA *intérieurement, les triangles* AA'B, CC'D, CB'B, AD'D *semblables à un triangle donné, la figure* A'B'C'D' *sera un parallélogramme.* (H. Van Aubel.)

Menons la diagonale BD. Les triangles AA'D', ABD étant semblables (voir question 55), l'angle des droites A'D', BD est égal à A'AB. De même, l'angle des droites B'C', BD est égal à C'CD. Mais A'AB = C'CD; par suite, les droites C'B', D'A' sont parallèles. Par analogie, B'A' et C'D' sont parallèles ; donc la figure A'B'C'D' est un parallélogramme.

P. Interdonato.

QUESTIONS PROPOSÉES.

67. Soient A_m la moyenne arithmétique des $m^{ièmes}$ puissances des nombres non supérieurs et premiers à N ; B_m la moyenne arithmétique des produits m à m des mêmes nombres. Démontrer les relations symboliques

$$A^m = (N - A)^m, \quad B^m = (N - B)^m. \qquad \text{(E. Cesáro.)}$$

68. Soient x, y, z les distances d'un point quelconque aux côtés d'un triangle donné. Trouver le minimum de $x^2 + y^2 - z^2$. (E. Lemoine)

69. Soient AA', BB', CC' les hauteurs du triangle ABC, A'', B'', C'' leurs milieux. Démontrer que l'aire du triangle A''B''C'' vaut le quart de celle de A'B'C'. (E. Hain.)

70. Soient K un point quelconque pris dans le plan du triangle ABC, H_1, H_2, H_3 les points de concours des hauteurs des triangles BKC, CKA, AKB. Démontrer que les triangles $H_1H_2H_3$, ABC sont équivalents. (J. Neuberg.)

71. Démontrer que le lieu décrit par le centre de la circonférence qui passe par les points d'incidence des normales abaissées sur une ellipse d'un même point de la développée, a pour équation

$$4(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = a^2b^2c^4x^2y^2. \qquad \text{(J. Neuberg.)}$$

72. Sur les côtés d'un triangle quelconque $A_1A_2A_3$, on construit extérieurement, les carrés $A_2A_3B_1C_1$, $A_3A_1B_2C_2$, $A_1A_2B_3C_3$. Les droites B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, suffisamment prolongées, forment un triangle $D_1D_2D_3$; de même, les droites B_1C_2, B_2C_3, B_3C_1 forment un triangle $E_1E_2E_3$. Cela posé : 1° Les points de concours des hauteurs d_1, d_2, d_3 des triangles $D_1B_2C_3$, $D_2B_3C_1$, $D_3B_1C_2$ sont symétriques, par rapport au centre de gravité de $A_1A_2A_3$, des points de concours des hauteurs e_1, e_2, e_3 des triangles $E_1B_1C_1$, $E_2B_2C_2$, $E_3B_3C_3$; 2° les triangles $d_1d_2d_3$, $e_1e_2e_3$, $A_1A_2A_3$ ont même centre de gravité ; 3° les perpendiculaires abaissées des milieux des côtés du triangle $e_1e_2e_3$, respectivement, sur les côtés de $A_1A_2A_3$ concourent en un même point ; 4° construire le triangle $A_1A_2A_3$, connaissant *a*) les milieux des droites B_1B_2, B_2C_3, B_3C_1 ; *b*) les points E_1, E_2, E_3. (Edm. Van Aubel.)

SUR LA SÉRIE HARMONIQUE ET LA FORMULE DE STIRLING.

1. *Objet de la présente note.* On peut trouver, d'une manière élémentaire, par des considérations géométriques, une valeur très approchée de la somme

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

de n termes de la série harmonique, et en déduire, *à une demi-unité près*, le logarithme népérien du produit 1.2.3...N. M. Catalan, dans le chapitre IV de son *Traité des Séries*, expose plusieurs applications intéressantes de la méthode qui conduit à ces résultats.

2. *Formules fondamentales.* Considérons une hyperbole équilatère ABC, ayant pour équation $xy = 1$. Soient $Oa = r$, $Ob = r + \frac{1}{2}$, $Oc = r + 1$, les abcisses des points A, B, C. Menons la corde AC, la tangente $\alpha B\gamma$ rencontrant Aa en α, Cc en γ, et soit AD une parallèle à l'axe des abcisses, rencontrant Cc en D. Posons :

u_r = aire curviligne ABCD, m_r = triangle ACD, M_r = trapèze $\alpha AD\gamma$.

On trouve, sans peine,

$$u_r = \frac{1}{r} - l\left(\frac{r+1}{r}\right), \quad m_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right), \quad M_r = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+\frac{1}{2}},$$

$$m_r < u_r < M_r,$$

relations dont la première et la dernière peuvent s'écrire, respectivement,

$$\frac{1}{r} = l\left(\frac{r+1}{r}\right) + u_r \qquad (1)$$

$$m_r < u_r < m_r + \frac{1}{2r(r+1)(2r+1)}. \qquad (2)$$

3. *Valeur approchée de* $\sum_n^{\infty} u_r$. La relation (2) donne immédiatement

$$\sum_n^{\infty} m_r < \sum_n^{\infty} u_r < \sum_n^{\infty} m_r + \sum_n^{\infty} \frac{1}{2r(r+1)(2r+1)}. \qquad (3)$$

Or,

$$\sum_n^{\infty} m_r = \sum_n^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n},$$

$$\sum_n^{\infty}\frac{1}{2r(r+1)(2r+1)}<\frac{1}{2(2n+1)}\sum_n^{\infty}\frac{1}{r(r+1)}.$$

Mais

$$\sum_n^{\infty}\frac{1}{r(r+1)}=\sum_n^{\infty}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)=\frac{1}{n};$$

donc

$$\frac{1}{2(2n+1)}\sum_n^{\infty}\frac{1}{r(r+1)}=\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}.$$

Par suite, l'inégalité (3) devient

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}<\sum_n^{\infty}u_r<\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}. \qquad (4)$$

4. *Constante d'Euler et de Mascheroni.* Posons

$$C=\sum_1^{\infty}u_r$$

et fesons $n=1$, dans la dernière inégalité. Il viendra

$$\frac{1}{2}<C<\frac{2}{3}.$$

La quantité C, dite constante d'Euler et de Mascheroni, a été calculée par diverses méthodes. On a trouvé approximativement (CATALAN, *Mélanges*, p. 164):

$$C=0\cdot 577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ (*).$$

(*) Nous engageons nos jeunes lecteurs à chercher l'interprétation géométrique de $\sum_1^{n-1}u_r$, $\sum_n^{\infty}u_r$ et C.

5. *Valeurs approchées de* H_n. Faisons $r = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$ dans la relation (1) et ajoutons les résultats. Il viendra

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} = ln + \sum_{1}^{n-1} u_r = ln + \sum_{1}^{\infty} u_r - \sum_{n}^{\infty} u_r = C + ln - \sum_{n}^{\infty} u_r.$$

Substituons, dans cette égalité, à $\sum_{n}^{\infty} u_r$ les deux valeurs, l'une plus grande, l'autre plus petite, données par l'inégalité (4), et ajoutons $\frac{1}{n}$ aux deux membres, nous trouverons

$$H_n < C + ln + \frac{1}{2n}, \tag{5}$$

$$H_n > C + ln + \frac{1}{2n+1}, \tag{6}$$

valeurs qui diffèrent l'une de l'autre de $\frac{1}{2n(2n+1)}$. On peut écrire, par conséquent,

$$H_n = C + ln + \frac{1}{2n} - \frac{\theta}{2n(2n+1)}, \qquad 0 < \theta < 1. \tag{A}$$

De l'inégalité (6), on déduit d'ailleurs, à fortiori,

$$H_n > C + ln + \frac{1}{2(n+1)}. \tag{7}$$

6. *Limite inférieure de* $l(1.2.3.\ldots N)$. Faisons dans l'inégalité (5), $n = 1, 2, 3, \ldots N$ et ajoutons. Nous trouverons

$$N + \frac{N-1}{2} + \frac{N-2}{3} + \cdots + \frac{1}{N} < NC + l(1.2.3\ldots N) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right),$$

ou successivement,

$$(N+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right) - N < NC + l(1.2.3\ldots N) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right),$$

$$\left(N + \frac{1}{2}\right) H_n - N < NC + l(1.2.3\ldots N).$$

Remplaçons, dans le premier membre, H_n par la valeur $C+lN+\frac{1}{2N+1}$, plus petite d'après (6); il viendra

$$\left(N+\frac{1}{2}\right)C+\left(N+\frac{1}{2}\right)lN+\frac{1}{2}-N<NC+l(1.2.3...N),$$

ou encore

$$l(1.2.3...N)>\frac{1}{2}(C+1)+\left(N+\frac{1}{2}\right)lN-N. \qquad (8)$$

7. *Limite supérieure de* $l(1.2.3...N)$. Faisons maintenant dans l'inégalité (7), $n=1,2,3,...N$, et ajoutons encore. Nous trouverons :

$$(N+1)H_n-N>NC+l(1.2...N)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{N+1}\right),$$

ou encore,

$$\left(N+\frac{1}{2}\right)H_n-N>NC+l(1.2...N)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(N+1)}.$$

Remplaçons H_n par la quantité $C+lN+\frac{1}{2N}$, plus grande, d'après (5). Nous trouverons successivement

$$\left(N+\frac{1}{2}\right)C+\left(N+\frac{1}{2}\right)lN+\frac{1}{2}+\frac{1}{4N}-N$$
$$>NC+l(1.2...N)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(N+1)},$$

$$l(1.2.3...N<\frac{1}{2}(C+1)+\left(N+\frac{1}{2}\right)lN-N+\frac{1}{2}+\frac{1}{4N}-\frac{1}{2(N+1)},$$

et, à fortiori,

$$l(1.2.3...N)<\frac{1}{2}(C+1)+\left(N+\frac{1}{2}\right)lN-N+\frac{1}{2}. \qquad (9)$$

8. *Formule (imparfaite) de Stirling.* Les inégalités (8) et (9) permettent d'écrire (θ étant compris entre zéro et l'unité)

$$l(1\ 2.3...N)=\frac{1}{2}(C+1)+\left(N+\frac{1}{2}\right)lN-N+\frac{\theta}{2}, \qquad (B)$$

ce qui est, sous une forme très imparfaite, il est vrai, la célèbre formule de Stirling.

La méthode exposée ici permet de trouver plusieurs relations plus générales que celles qui précèdent touchant la série harmonique. Nous espérons en déduire aussi quelques conséquences sur la formule de Stirling et, en particulier, sur la limite de θ, pour $n=\infty$. (P. M.)

×SUR LE CENTRE DES MÉDIANES ANTIPARALLÈLES.

(Suite : voir p. 153.)

5. Les tangentes menées par A, B, C à la circonférence ABC forment un nouveau triangle A''B''C''. K *est le centre d'homologie des triangles* ABC, A''B''C''. Car, si la parallèle à B''C'', menée par A'', rencontre AB en B''', AC en C''', les triangles A''CC''', A''BB''' seront semblables à B''CA, C'''BA ; d'où A''C''' = A''C = A''B = A''B''', et AA'' est une médiane antiparallèle du triangle ABC (*).

Les points A'', B'', C'' sont les *associés* du point K ; leurs distances aux côtés de ABC sont également proportionnelles, au signe près, à ces côtés. La propriété indiquée au n° 2 est applicable aux points A'', B'', C'', si l'on remplace un carré extérieur par un carré construit intérieurement.

Lorsque l'angle A est obtus, le point A'' jouit de la propriété de rendre la quantité $y^2 + z^2 - x^2$ minimum (**).

Les points K, A'', B'', C'' sont respectivement les centres des coniques décrites par les points tels que les quantités $x^2+y^2+z^2$, $-x^2+y^2+z^2$, $x^2 - y^2 + z^2$, $x^2 + y^2 - z^2$ sont constantes (***).

6. Soient K'_a, K'_b, K'_c, G'_a, G'_b, G'_c les projections des points K, G sur les côtés de ABC. On a (n° 1)

$$\frac{K'_aKK'_b}{ABC} = \frac{KK'_a \cdot KK'_b}{ab} = \frac{4S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}, \text{ etc.};$$

donc $K'_aKK'_b = K'_bKK'_c = K'_cKK'_a$, et K *est le centre de gravité du triangle* $K'_aK'_bK'_c$.

On sait que, si les côtés d'un triangle T(†) sont parallèles aux

---

(*) Plus simplement, les droites AC'', AB, AA'', AC forment un faisceau harmonique.

On peut remarquer que les droites B'''C, C'''B sont perpendiculaires à AC, AB et se coupent au point de circonférence ABC, qui est diamétralement opposé à A.

(**) Cette propriété fait l'objet de la question 68 (Lemoine).

(***) x, y, z sont les distances d'un point quelconque aux côtés de A, B, C. Pour la première de ces coniques, signalée par M. E. Cesàro, voir *Mathesis*, p. 129. Les trois autres courbes nous ont été signalées par M. E. Lemoine.

(†) On peut prendre pour sommets du triangle T les points qui divisent AB, BC, CA dans le rapport 1 : 2.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

médianes de ABC, ils sont aussi proportionnels à ces médianes, et que les médianes de T sont parallèles et proportionnelles aux côtés de ABC. En comparant les triangles T, $K'_aK'_bK'_c$, on trouve facilement que *les droites* $K'_bK'_c$, $K'_cK'_a$, $K'_aK'_b$ *sont perpendiculaires et proportionnelles aux médianes de* ABC.

Les médianes antiparallèles sont perpendiculaires aux droites $G'_bG'_c$, $G'_cG'_a$, $G'_aG'_b$ (*); car angle $GG'_bG'_c = BAG = CAK$.

7. *Les points isogonaux* G, K *sont les foyers d'une conique inscrite à* ABC. *Leurs projections sur les côtés de* ABC *appartiennent à une même circonférence ayant le grand axe de la conique pour diamètre. Le petit axe est égal à* $\sqrt{KK'_a \cdot GG'_a} = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)}$. *Les points de contact partagent les côtés de* ABC *en segments proportionnels aux carrés des médianes adjacentes* (**); *ce sont donc les pieds des médianes antiparallèles des triangles* BGC, CGA, AGB.

8. Soient O le centre du cercle ABC, A_1, B_1, C_1 les projections de K sur OG_a, OG_b, OG_c. La circonférence décrite sur OK comme diamètre, passe par A_1, B_1, C_1. A cause de l'égalité (1), les triangles isocèles BA_1C, CB_1A, AC_1B sont semblables, de sorte que les angles B_1AC, C_1BA,... ont une valeur commune α. Il résulte, de là, que les droites AB_1, BC_1 se coupent sous un angle égal à BAC ou à B_1KC_1; donc leur point d'intersection ω est sur le cercle $A_1B_1C_1$, et CA_1 passe par ω. De même, les droites AC_1, BA_1, CB_1 se coupent en un second point ω' du

---

(*) La même propriété s'applique à deux points isogonaux quelconques.

(**) Pour une démonstration de cette propriété, indépendante de la théorie des coniques, voir CATALAN, *Théorèmes et problèmes*, 6e édition, page 52; on peut aussi remarquer que les directions de $G'_bG'_c$, $K'_bK'_c$, symétriques par rapport à AI, sont antiparallèles par rapport à AB et AC.

Pour déterminer le point D_a où la conique touche BC, désignons par β, γ les angles GBC, GCB. Nous aurons $G'_aD_a : K'_cD_a = GG'_a : KK'_a$; d'où

$$BD_a = (BG'_a \cdot KK'_a + BK'_a \cdot GG'_a) : (KK'_a + GG'_a).$$

Mais

$$BG'_a = GG'_a \cot\beta, \qquad BK'_a = KK'_a \cot(B - \beta);$$

par suite,

$$\frac{BD_a}{CD_a} = \frac{\cot\beta + \cot(B-\beta)}{\cot\gamma + \cot(C-\gamma)} = \frac{\sin B \sin\gamma \sin(C-\gamma)}{\sin C \sin\beta \sin(B-\beta)}.$$

BG étant la médiane, on a $\sin(B-\beta) : \sin\beta = \sin A : \sin C$, etc.

cercle $A_1B_1C_1$. Le triangle $A_1B_1C_1$ est symétriquement semblable à ABC, et la corde $\omega\omega'$ sous-tend un segment capable de l'angle 2α.

Les points ω, ω' peuvent être définis par les conditions :

$$\text{angle } \omega AC = \omega BA = \omega CB, \text{ angle } \omega' AB = \omega' BC = \omega' CA ;$$

ils sont à l'intersection des arcs des segments capables des angles B, C, A décrits respectivement sur AB, BC, CA ou sur BC, CA, AB. Nous les appellerons *Points de Brocard*, du nom du géomètre qui les a considérés pour la première fois. On peut donc énoncer le théorème suivant : ***Dans tout triangle*** ABC, ***le centre*** O ***du cercle circonscrit, le centre*** K ***des médianes antiparallèles, les points de Brocard***, ω, ω' ***et les points d'intersection*** A_1, B_1, C_1 ***des droites qui joignent*** ω, ω' ***aux sommets de*** ABC, ***sont sept points d'une même circonférence*** (Cercle de Brocard).

9. On trouve facilement (n° 1)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1G_a}{BG_a} = \frac{2x}{a} = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2},$$

d'où, si h_a, h_b, h_c sont les hauteurs de ABC,

$$\cot\alpha = \frac{a^2}{4S} + \frac{b^2}{4S} + \frac{c^2}{4S} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c}\right).$$

Mais

$$a = BH_a + CH_a = h_a(\cot B + \cot C), \text{ etc.};$$

donc

$$\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C.$$

On peut remarquer les formules

$$x = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha, \quad y = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\alpha, \quad z = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = S\operatorname{tg}\alpha, \quad K'_aK'_bK'_c = \frac{1}{3}S\operatorname{tg}\alpha.$$

(*) Les propriétés contenues dans les n^{os} 8 et 9 ont été extraites de la *Nouvelle Correspondance Mathématique* t. 4, 5, 6, et de notes manuscrites que M. Brocard a eu la gracieuseté de nous communiquer.

Nous nous proposons de consacrer un article spécial à l'étude des points et du cercle de Brocard.

10. *Les points de Brocard sont les foyers d'une conique* Q *inscrite à* ABC, *touchant les côtés aux pieds des médianes antiparallèles*(*). Les axes de Q se déterminent comme ceux de la conique du n° 7.

La circonférence ABC *est le lieu des projections des points* ω, ω' *sur les tangentes à* Q, *les projetantes faisant l'angle* α *avec ces droites*(**).

On peut aussi remarquer que le point K est le centre d'une conique touchant les côtés de ABC aux pieds des hauteurs. (*A continuer.*)

SUR UNE SOMME DE CUBES,

par M. S. Realis, ingénieur à Turin.

Problème. *Un nombre* p, *qui est la somme de* n *cubes entiers, étant donné, assigner un nombre* q, *tel que le produit* p^3q *soit la somme algébrique de* n *cubes entiers.*

Solution. Soit

$$p = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \cdots + \alpha_n^3,$$

et posons

$$P_1 = 3\alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2) - p,$$

$$P_2 = 3\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2) - p,$$

. . . . . .

$$P_n = 3\alpha_n(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2) - p,$$

$$q = 9(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) - np;$$

nous aurons, par identité,

$$p^3q = P_1^3 + P_2^3 + P_3^3 + \cdots + P_n^3,$$

ce qui résout le problème proposé.

(*) Pour la détermination des points de contact, voir la note 2, p. 174.

(**) D'après un théorème dû à Poncelet.

EXEMPLE. Pour

$$p = (a + b)^3 + (a - b)^3,$$

on a

$$P_1 = 2(2a^3 + 3a^2b + 3b^3),$$

$$P_2 = 2(2a^3 - 3a^2b - 3b^3),$$

$$q = 8a(4a^2 + 3b^2),$$

d'où l'identité

$$p^2q = P_1^3 + P_2^3.$$

Écrivant ce résultat comme il suit :

$$4(a^2 + 3b^2)^2(4a^2 + 3b^2)a^3 = (2a^3 + 3a^2b + 3b^3)^3 + (2a^3 - 3a^2b - 3b^3)^3,$$

on a une solution directe, en nombres entiers x, y, z, de l'équation indéterminée

$$x^3 + y^3 = kz^3,$$

dans laquelle le coefficient k appartient à la forme

$$4(a^2 + 3b^2)^2(4a^2 + 3b^2).$$

On voit, par suite, en s'appuyant sur des propositions connues, que : a *et* b *étant des entiers quelconques, différents de zéro, la valeur numérique de l'expression*

$$(a^2 + 3b^2)^2(4a^2 + 3b^2)$$

ne se réduit jamais à un cube, ni au double, ni au quadruple, ni au sextuple d'un cube. Ainsi, par exemple, le rapport $\frac{4a^2 + 3b^2}{a^2 + 3b^2}$, pour a différent de zéro, n'est jamais égal à un cube rationnel. Il y a, du reste, d'autres cas analogues d'impossibilité, se rapportant à l'expression considérée ; nous ne nous y arrêtons pas ici.

On peut encore observer que la dernière identité, en y faisant $a = 1$, fournit une solution directe, en nombres entiers et *positifs* x, y, z, de l'équation indéterminée

$$x^3 - y^3 = kz^2,$$

dans laquelle k est un nombre de la forme $4 + 3b^2$.

BIBLIOGRAPHIE.

Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit J. L. Heiberg, Dr Ph. Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri. Vol. I, 1880, XII-499 pages; vol. II, 1881, VIII-468 pages. Prix : 12 marcs.

Voici enfin une édition complète du texte grec des Œuvres d'Archimède, faite avec le soin et la rigueur que réclame la critique philologique moderne; elle est accompagnée d'une traduction latine très lisible à laquelle s'en tiendront sans doute les mathématiciens, au moins au commencement. Un manuscrit de Florence, que M. Heiberg a pu collationner lui-même, est la base de la nouvelle édition; néanmoins, il a utilisé aussi un autre manuscrit de la bibliothèque de S. Marc, quatre manuscrits de Paris et les éditions antérieures des œuvres complètes d'Archimède. Le premier volume contient les deux livres sur la sphère et le cylindre, la mesure du cercle et le livre sur les conoïdes et les sphéroïdes. Dans le second volume se trouvent d'abord les mémoires sur les spirales, le centre de gravité, l'arénaire, la quadrature de la parabole et l'écrit sur l'hydrostatique dont Lagrange disait qu'il y a peu à y ajouter au point de vue des questions d'équilibre des corps flottants. Ce sont là tous les ouvrages d'Archimède dont l'authenticité soit au-dessus de tout doute. Mais M. Heiberg a cru avec raison ne pas devoir s'en tenir là et il a admis dans son édition les *Lemmes*, le célèbre *Problème des bœufs* et une série de *Fragments*. Dans ces Fragments, il a reuni tout ce que l'on sait d'après diverses sources, sur les polyèdres semi-réguliers d'Archimède, ensuite des Notices sur les ἀρχαί, sur l'ἐφόδιον, sur le livre apocryphe περὶ ζυγῶν, sur un globe douteux qui lui est attribué, enfin un travail astronomique et une démonstration de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion, que Georges Valla en a déduite.

Comme on le voit, les deux volumes publiés par M. Heiberg contiennent réellement tout ce qui émane directement ou indirectement d'Archimède (*) On sait que les ouvrages du grand géomètre syracusain étaient écrits en dialecte dorien; or, l'on ne possède quelques-uns des mémoires que dans une traduction en dialecte attique. L'éditeur a essayé, pour cette partie de son travail, de rétablir le texte primitif d'Archimède.

Le nombre des géomètres qui s'intéressent à l'histoire des mathématiques va sans cesse en croissant et l'on ne peut que s'en réjouir. C'est à eux, en particulier, que nous recommandons vivement l'édition de M. Heiberg, qui figure si dignement dans la célèbre « Bibliotheca Teubneriana. »

S GÜNTHER.

(*) Le tome III contiendra les *Commentaires* d'Eutocius et, nous l'espérons, les commentaires modernes sur les procédés qui ont été employés par Archimède pour le calcul de certaines racines carrées approchées. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 51.

Construire un quadrilatère ABCD, *connaissant les quatre côtés et sachant que deux angles consécutifs* A et B *sont égaux entre eux.* (DELBŒUF.)

Solution géométrique, par M. PISANI. Sur une droite indéfinie, prenons une longueur CD égale à l'un des côtés donnés. Des points C, D comme centres, avec des rayons égaux à deux autres des côtés donnés, décrivons deux circonférences de cercle. Soient E, F les points où le côté cherché AB rencontre la circonférence D et la droite CD. De l'égalité des angles A, B, on déduit facilement que les droites DE, CB sont parallèles; donc F est le centre de similitude des deux cercles D, C et peut être déterminé. On peut aussi obtenir les droites FA, FB dont on connaît la différence AB et le produit FC · FD, A et B étant des points antihomologues des deux circonférences.

Solution trigonométrique, par M. ROCCHETTI. Posons $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, et soit H le point où une parallèle à AB par D rencontre BC. On trouve facilement

$$c^2 = \overline{DH}^2 + (b - d)^2 - 2DH \cdot (b - d) \cos B$$

$$DH = a - 2d \cos B.$$

L'élimination de DH conduit à une équation du second degré en cos B.

M. Pisani a aussi résolu la même question par la trigonométrie.

Question 62.

Lorsque les deux extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites qui se coupent, un point de la droite décrit une ellipse. Démontrer que l'aire de cette ellipse est indépendante de l'angle des deux droites. (STEINER.)

Soient Ox, Oy les deux droites qui se coupent, AB une droite de longueur constante qui se meut en s'appuyant sur Ox et sur Oy, M un

---

(*) Nous avons reçu, trop tard pour pouvoir la mentionner dans le n° d'octobre, une excellente solution de la question 41, par M. Pierre Visalli Saya, élève à l'Université de Messine.

point de cette droite. On sait que la circonférence AOB a un rayon constant, et que les droites ON, OP qui joignent le point O aux extrémités N et P du diamètre passant par le point M sont deux droites fixes (*). Par suite, le point M décrit une ellipse dont les demi-axes sont MN et MP et dont l'aire a pour mesure $\pi \cdot MN \cdot MP$. Mais

$$MN \cdot MP = MA \cdot MB$$

quel que soit l'angle xOy. Donc le théorème est démontré. V. JAMET.

Question 63.

Lorsque les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites de l'espace, cette droite engendre une surface du quatrième ordre; démontrer que le volume compris entre cette surface et deux plans fixes parallèles aux deux droites ne varie pas, lorsque les deux directrices se déplacent d'une manière quelconque dans deux plans parallèles aux deux plans donnés. (E. LUCAS.)

Je dis d'abord que tout plan parallèle aux deux droites coupe la surface suivant une ellipse, dont l'aire est indépendante de l'angle des deux droites. En effet, soient AH et BK les deux droites données, AB une position de la droite mobile, M un point pris sur cette droite, m sa projection sur un plan mené par la droite AH parallèlement à BK, P la projection du point B sur le même plan. Le point P décrit, dans ce plan, une droite fixe parallèle à BK, et comme, dans le triangle rectangle ABP, l'hypoténuse est constante, ainsi que le côté BP, le côté AP est lui-même constant, et ne dépend pas de l'angle AOP. De plus, le point m divisant la droite AP dans le rapport constant MA : MB, les deux segments mA, mP sont constants. Donc le point m décrit une ellipse dont l'aire est $\pi \cdot m\text{A} \cdot m\text{P}$. Cette ellipse est elle-même la projection de la ligne décrite par le point M, et comme celui-ci se meut dans un plan

---

(*) Voir BRIOT et BOUQUET, *Géométrie analytique*, 6e édition, n° 35. Le rayon est constant parce que l'angle AOB et la base AB sont constants dans le triangle AOB. La somme PN et le produit $MN \cdot MP = MA \cdot MB$ des segments MN, MP étant constants, il en est de même de ces segments. Par suite, les cordes NA, PB et les angles AON, BOP sont aussi invariables. Ce théorème a été trouvé ou retrouvé par M. Mannheim, lorsqu'il était élève de M. Catalan. Voir le Cours autographié de ce dernier (*Lycée Charlemagne. Application de l'Algèbre à la géométrie*, 1848, p. 196).

parallèle aux deux droites données, il décrit une ellipse égale à celle que décrit le point m (*).

L'aire de cette ellipse est la dérivée du volume proposé, par rapport à la distance Mm, considérée comme variable indépendante. La différentielle de ce volume s'obtiendra en multipliant cette dérivée par la différentielle de Mm. Or on a

$$\frac{Mm}{Am} = \frac{BP}{AP}, \quad \text{ou} \quad Mm = \frac{BP}{AP} Am;$$

donc si l'on désigne par x la variable Am, par l la distance constante AP, par L la longueur BP, constante aussi, la différentielle du volume sera

$$\frac{\pi L}{l} x (l - x) dx.$$

Le volume est donc égal à

$$\frac{\pi L}{l} \int_a^b x (l - x) dx,$$

a et b désignant les valeurs de Am qui correspondent aux deux plans parallèles au plan AOP, entre lesquels est compris ce volume.

La recherche de cette intégrale n'offre aucune difficulté, et l'on voit que les grandeurs L, l, a et b qui y entrent, sont indépendantes de l'angle AOP. V. JAMET.

On peut prendre aussi, comme l'a fait M. Mister, dans une solution qu'il nous a communiquée, pour variable indépendante, la distance du point M, au plan mené par le milieu de AB, parallèlement aux droites données. Le volume total compris à l'intérieur de la surface décrite par M est égal, d'après les notations de M. Jamet, à l'expression

$$2\pi \frac{L}{l} \int_0^{\frac{1}{2}l} x (l - x) dx = \frac{1}{6} \pi L l^2.$$

On ne peut pas, sans précaution, calculer l'intégrale à laquelle arrive M. Jamet, parce que x croît de 0 à $\frac{1}{2}l$, puis décroît de $\frac{1}{2}l$ à 0, de sorte qu'elle est égale à

$$\int_a^{\frac{1}{2}l} x (l - x) dx + \int_{\frac{1}{2}l}^b x (l - x) (-dx),$$

comme on le voit aisément. Si $a = b = 0$, les deux parties de cette somme sont égales et on trouve l'expression donnée plus haut. Cette petite difficulté ne se présente pas quand on prend la variable indépendante indiquée plus haut. (P. M.)

(*) A la rigueur, on peut déduire le théorème de M. Lucas de ce que l'ellipse décrite par M est indépendante de l'angle des droites fixes, sans employer le calcul intégral.

Question 64.

Lorsque trois points A, β, C *d'une droite glissent sur les faces d'un angle trièdre, un quatrième point* M *de cette droite décrit un ellipsoïde; démontrer que le volume de l'ellipsoïde est indépendant de l'inclinaison des faces de l'angle trièdre.*

Soient ox, oy, oz les trois arêtes d'un angle trièdre; α, β, γ les angles yoz, zox, xoy qu'elles forment entre elles. Considérons la droite dans une quelconque des positions qu'elle peut prendre. Soient A le point situé dans le plan zy, B le point situé dans le plan zx et C le point situé dans le plan xy. Menons, dans le plan zox, Bb parallèle à ox, et, dans le plan zoy, Aa parallèle à oy. Si l'on fait glisser les extrémités A et B de la droite ACB sur les droites Aa et Bb, le point C restera dans le plan xoy et le point M se déplacera dans un plan parallèle à ce plan (Legendre, Livre V, Proposition XV). Comme on l'a vu dans la question précédente, ce point décrit une ellipse dont l'aire est indépendante de l'angle des droites Bb, Aa, c'est-à-dire de l'angle xoy. Nous allons chercher l'aire de cette ellipse en fonction des données de la question.

Nommons l la longueur CM, m le rapport $\frac{CB}{CM}$, n le rapport $\frac{CA}{CM}$; on aura

$$CB = lm, \quad CA = ln, \quad BM = l(m - 1), \quad AM = l(n + 1).$$

Cela posé, projetons orthogonalement sur le plan xoy les droites Aa et Bb en A'o' et B'o' respectivement parallèles à oy et ox, et projetons de même en A'CM'B' la droite ACMB. La courbe décrite par le point M de la droite AB se projette en vraie grandeur sur la courbe décrite par le point M' de la droite A'B', de grandeur constante, dont les extrémités glissent sur les droites $o'A'y'$, $o'B'x'$. Pour avoir l'aire de cette ellipse il nous suffit de connaître la grandeur de chacun des segments A'M' et B'M'. Ces longueurs s'obtiennent sans difficulté.

Désignons par h la distance du point M au plan xoy; les distances des points B et A au même plan seront respectivement hm et hn; la différence de hauteur des points M et B vaudra, par conséquent, $h(m - 1)$ et celle des points M et A sera $h(n + 1)$. Ces différences de niveau étant connues, on en déduit la longueur des projections M'B', M'A' des segments MB et MA, savoir :

$$M'B' = (m - 1)\sqrt{l^2 - h^2}, \qquad M'A' = (n + 1)\sqrt{l^2 - h^2}.$$

Ces segments sont constants pour une même valeur de h, c'est-à-dire lorsque les extrémités A et B de la droite glissent sur les droites Aa, Bb. En même temps les points A′ et B′ glissent sur les droites o'A′y', o'B′x' et le point M′ décrit une ellipse dont l'aire U, comme on l'a vu dans la question précédente, a pour expression

$$U = \pi (n + 1)(m - 1)(l^2 - h^2).$$

La plus grande valeur de h est évidemment égale à l : la droite AB est alors perpendiculaire au plan xoy. *L'aire* U *étant indépendante de l'inclinaison des faces du trièdre, ainsi que la hauteur maxima* l *qu'elle peut atteindre, on en conclut qu'il en est de même du volume qu'elle engendre en se déplaçant parallèlement à elle-même.* L'expression de ce volume est évidemment

$$V = \int_{-l}^{+l} \pi (n + 1)(m - 1)(l^2 - h^2)\, dh,$$

ou, en effectuant l'intégration,

$$V = \tfrac{4}{3} \pi (n + 1)(m - 1) l^3 = \tfrac{4}{3} \pi \, AM \cdot BM \cdot CM.$$

Remarque. On obtient sans difficulté l'équation de l'ellipsoïde lieu du point M. En effet, soient x, y, z les coordonnées de ce point M, celles du point C seront $\frac{nx}{n+1}$, $\frac{my}{m-1}$, 0; exprimant alors que la distance des points C et M est constante et égale à l, on obtient l'équation

$$\frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{y^2}{(m-1)^2} + z^2 - \frac{2xy}{(n+1)(m-1)} \cos\gamma - \frac{2yz}{(m-1)} \cos\alpha + \frac{2zx}{n+1} \cos\beta = l^2.$$

Si l'on cherche, par les procédés ordinaires du calcul intégral, le volume du corps limité à cette surface, on retombe sur la formule trouvée plus haut. Il est assez intéressant de voir comment disparaît du résultat final la fonction assez compliquée des angles α, β et γ. Nous laissons aux lecteurs de la *Mathesis* le soin de faire ce calcul (*).

J. Mister.

(*) Nous publierons, dans un prochain numéro, une solution des questions 63, 64 où les volumes sont déterminés sans recourir au calcul intégral (P. M.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

73. Étant donnée une circonférence quelconque O, trouver le maximum de l'aire comprise entre un rayon OA, deux parallèles menées par O et A, et l'arc intercepté par ces parallèles. (G. PETIT-BOIS.)

74. On donne deux circonférences O, O′ dont la seconde a pour diamètre un rayon OA de la première. Mener par O et A, du même côté de OA, deux parallèles telles que l'aire comprise entre ces droites et les arcs interceptés sur les deux circonférences soit maximum.

(G. PETIT-BOIS.)

75. Étant donnés deux nombres quelconques, il y a environ 61 à parier contre 39, qu'ils sont premiers entre eux. (E. CESÁRO.)

×**76.** On projette un point M sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle, les projetantes étant respectivement parallèles à CA, AB, BC, ou à AB, BC, CA; soient A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 ces projections. Trouver le lieu d'un point M tel que les projections A_1, B_1, C_1 soient en ligne droite. Les points A_2, B_2, C_2 seront sur une seconde droite; trouver le lieu du point d'intersection des droites $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. (J. N.)

×**77.** Démontrer que, pour tout nombre entier $n > 2$, on a

$$2^{2^n-n-1} - 1 = \frac{(2^n-1)(2^n-2)}{2\cdot 3} + \frac{(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)(2^n-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$+ \cdots + \frac{(2^n-1)(2^n-2)\cdots\cdots(2^{n-1}+2)}{2\cdot 3\cdots\cdots(2^{n-1}-1)}.$$

REMARQUE. On déduit de là que : *tout nombre premier* $2^n - 1$, *plus grand que l'unité, est diviseur du nombre* $2^{2^n-n-1} - 1$. Cette proposition peut aussi être démontrée (et généralisée) à l'aide du théorème de Fermat. (S. REALIS.)

78. Les équations de la forme

$$x^4 - (\alpha + \beta + 2\gamma)x^3 + (\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 + 3\delta^2)x^2$$
$$- [(\alpha + \beta)(\gamma^2 + 3\delta^2) + 2\alpha\beta\gamma]x + \alpha\beta(\gamma^2 + 3\delta^2) = 0,$$

où α, β, γ, δ, sont des nombres entiers ou des fractions, sont les seules équations du quatrième degré ayant une racine entière ou fractionnaire qui puisse être trouvée, par les formules d'Euler, en n'opérant que sur des grandeurs commensurables. (E. KUMMER.)

*SUR LE CENTRE DES MÉDIANES ANTIPARALLÈLES(*).

(Fin, voir *Mathesis*, pp. 153 et 173.)

11. (Fig. 1.) Menons par K, dans les angles A, B, C, les droites NN', PP', MM' antiparallèles à BC, CA, AB. Comme elles sont égales entre elles(**) et divisées par K en parties égales, leurs extrémités appartiennent à une même circonférence. Ces droites sont les diagonales de trois rectangles, PM'P'M, MN'M'N, NP'N'P inscrits dans ABC. Le milieu de M'P étant sur la médiane AG_a, K est sur la médiane $G_a h_a$ du triangle G_aAH_a; par conséquent, ***les droites qui joignent les milieux des côtés d'un triangle aux milieux des hauteurs correspondantes, se coupent au centre des médianes antiparallèles*** (***).

Le milieu h_a de AH_a divise G_bG_c en parties proportionnelles à CH_a, BH_a; il en résulte que K ***est, par rapport au triangle*** $G_aG_bG_c$, ***le conjugué isotomique du centre du cercle*** ABC(†).

Remarquons aussi qu'***à tout triangle*** ABC, ***on peut inscrire deux triangles*** NPM, N'P'M' ***ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux de*** ABC; ***ces triangles sont inscrits à une même circonférence qui a pour centre le point*** K. La réciproque est vraie et se démontre facilement.

L'angle M'MP' étant égal à A, on a

$$M'P' = 2x = a \operatorname{tg} \alpha = 2R \operatorname{tg} \alpha \sin A,$$

$$MP' = 2R \operatorname{tg} \alpha \cos A, \quad KM = R \operatorname{tg} \alpha.$$

Le rapport de similitude des triangles NPM, ABC est donc égal à $\operatorname{tg} \alpha$.

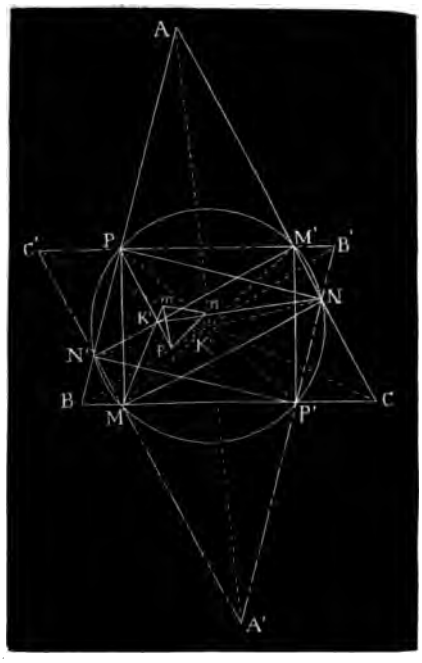
(*) Les figures qui accompagnent cet article ne peuvent contenir qu'une partie des points dont il est parlé dans le texte. Nous conseillons au lecteur de faire une ou plusieurs figures de plus grand format.

(**) Car les angles KNA, KM'C sont égaux à B. L'égalité des antiparallèles a été signalée par M. Lemoine. Comparer aussi *Nouvelle correspondance mathématique*, t. III, p. 183 (Brocard).

(***) M. E. Hain a démontré, en se servant des coordonnées trilinéaires, que les droites G_ah_a, G_bh_b, G_ch_c se coupent en un même point (*Archives de Grunert*, t. 57, p. 323). La propriété que ce point coïncide avec K est peut-être nouvelle.

(†) L'expression de points conjugués *isotomiques* a été définie p. 158.

12. (Fig. 1.) Considérons maintenant NMP comme étant le triangle primitif. Nous pourrons dire qu'*à tout triangle* NMP, *on peut circonscrire deux triangles* ABC, A'B'C' *qui ont leurs côtés perpendiculaires à ceux de* NMP ; *ces triangles ont pour centre commun des médianes antiparallèles le centre* K *de la circonférence* NMP. *Leur rapport de similitude relativement à* ABC *est égal à* cot α.



Les médianes antiparallèles NK', PK', MK' du triangle NMP sont évidemment perpendiculaires à celles de ABC. Soient n, m, p les intersections des premières lignes par les secondes ; ces points qui appartiennent au cercle décrit sur KK' comme diamètre (cercle de Brocard, de NMP), ont une signification remarquable. A cause des angles droits APN, AnN, le quadrilatère APnN est inscriptible ; donc

angle PnN $=\pi-$A$=\pi-$PNM,
angle nPN $=n$AN $=n$NM.

De même, MnN $=\pi-$A' $=$ PnN ; par suite, les triangles nPN, nNM sont semblables. Donc les *centres de similitude de trois figures semblables, construites sur les côtés* PN, NM, MN *d'un triangle* NPM, *sont situés sur le cercle de Brocard, sur les médianes antiparallèles et sur les circonférences qui passent par deux sommets de* NPM *et par le centre du cercle circonscrit* (*).

Comme NnK' est la bissectrice de l'angle PnM, les droites Nn et nA divisent PM harmoniquement. On déduit de là que *les lignes* MP, A'A *et*

(*) Cette propriété nous a été communiquée par M. Brocard, qui la démontre différemment. Elle résulte aussi de la théorie d'un système de trois figures semblables, théorie qui a été développée par M. Grouard (voir *Nouvelle Correspondance*, t. VI, p. 323).

la tangente en N *à la circonférence* NPM *passent par un même point* (*).

Supposons maintenant que les côtés de ABC, au lieu d'être perpendiculaires à ceux de NPM, fassent avec ceux-ci un même angle quelconque APN = CNM = BMP = δ. Les points A, B, C se meuvent sur les circonférences circonscrites aux triangles N*n*P, P*p*M, M*m*C; les médianes antiparallèles de ABC tournent autour des points *n*, *p*, *m* en faisant avec celles de NPM l'angle δ; K étant leur intersection, les points *n*, *p*, *m* se trouvent sur la circonférence du segment capable de δ et décrit sur KK'. Donc *le cercle de Brocard, pour un triangle* NMP, *est le lieu des centres des médianes antiparallèles des triangles semblables et circonscrits à* NMP. On peut aussi remarquer que *tous ces triangles ont pour centre de similitude un point de Brocard.*

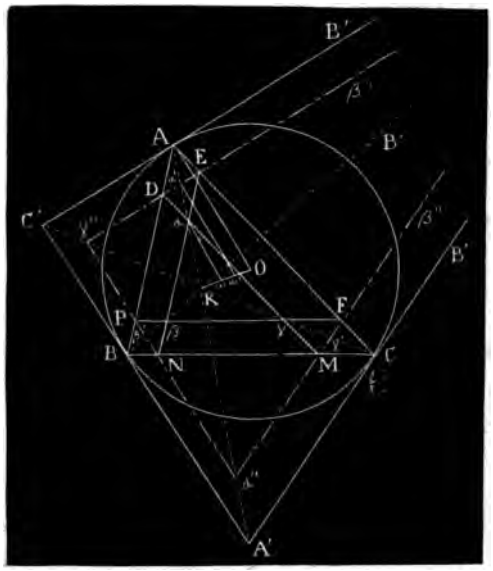
13. Reprenons nos premières notations. Soient A''B''C'' le triangle formé par les tangentes en A, B, C au cercle ABC, $K_aK_bK_c$ celui des pieds des médianes antiparallèles. Les trois triangles ABC, A''B''C'', $K_aK_bK_c$ ont même centre d'homologie K et même axe d'homologie. *Cet axe est, à la fois, la polaire de* K *par rapport au cercle* ABC *et par rapport à la conique qui touche les côtés du triangle* ABC *en* K_a, K_b, K_c. *Il est donc perpendiculaire à* KO. De plus, *c'est l'axe radical du cercle* ABC *et du cercle de Brocard*; car la polaire d'un point K, par rapport à un cercle O, est évidemment la corde commune à ce cercle et à celui qui a pour diamètre la distance KO, lorsque K est extérieur au premier cercle, et l'on passe au cas d'un point intérieur au moyen du *principe de continuité,* dû à Poncelet.

14. (Fig. 2). Menons trois parallèles aux côtés de ABC, à des distances proportionnelles à ces côtés; nous obtenons ainsi un nouveau triangle $\alpha\beta\gamma$ qui est homothétique à ABC par rapport au centre K des médianes antiparallèles.

Les côtés des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ *se coupent mutuellement en six points* D, E, F, M, N, P *appartenant à une même circonférence dont le centre* ω' *est sur la droite joignant* K *au centre* O *de la circonférence* ABC. En effet, les droites DE, PN, MF qui sont divisées aux points α', β', γ' en parties égales par les médianes antiparallèles, sont parallèles aux tangentes

(*) Ce point est évidemment le pôle de la droite NK', qui passe par le point d'intersection des tangentes aux points M, P. Comparer *Nouvelles Annales*, année 1873, p. 366 (Lemoine).

B'C', C'A', A'B' menées par A, B, C à la circonférence O. Comme elles divisent les lignes AK, BK, CK en parties proportionnelles, elles forment un triangle $\alpha''\beta''\gamma''$ homothétique à ABC par rapport à K. Les points α', β', γ', homologues de A, B, C sont les points de contact du cercle inscrit à $\alpha''\beta''\gamma''$, et le centre de ce cercle est situé sur la droite



KO. Mais DE = MF = NP, les trapèzes DEFM, MFPN étant isocèles (angle AED = EAB' = FCB' = CFM) ; par suite $\omega'D = \omega'E = \omega'F$... (*).

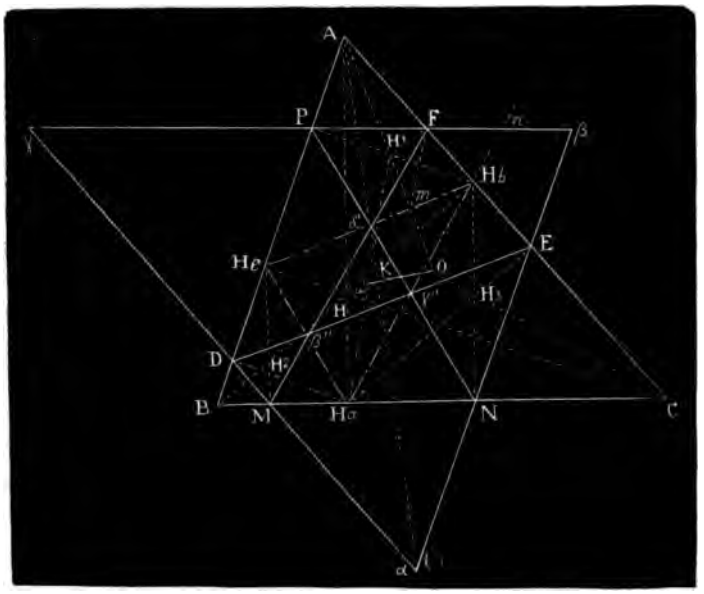
Les résultats qui précèdent peuvent être énoncés autrement. Par exemple, *les extrémités de trois droites égales, menées entre les angles d'un triangle* ABC *parallèlement aux côtés correspondants du triangle orthocentrique, sont situées sur une même circonférence.* Ou encore : *Si les sommets d'un triangle* $\alpha''\beta''\gamma''$ *se trouvent sur les médianes antiparallèles d'un autre triangle* ABC, *et que ses côtés soient parallèles aux droites joignant les pieds des hauteurs de* ABC, *les côtés de ces triangles se coupent mutuellement en six points d'une même circonférence.*

15. Le cas particulier où le triangle $\alpha''\beta''\gamma''$ se réduit au point K a été examiné ci-dessus (n° 11). Le triangle $\alpha\beta\gamma$ est alors symétrique de ABC par rapport à K.

(*) Les circonférences DEF font l'objet de la question 11. (*Mathesis*, p. 59).

Supposons maintenant que le triangle $\alpha\beta\gamma$ se réduise au point K. Nous pourrons dire que *les parallèles aux côtés d'un triangle* ABC, *menées par le point* K, *rencontrent le périmètre de* ABC *en six points d'une même circonférence dont le centre est au milieu de* KO (Lemoine). Les droites DE, PN, MF passent par les milieux de AK, BK, CK et sont égales à $R \operatorname{tg} \alpha$. Le rayon de la circonférence DEF s'exprime par $\frac{1}{2} R \sec \alpha$, car $\alpha' E = \frac{1}{2} R \operatorname{tg} \alpha$, $\omega'\alpha' = \frac{1}{2} R$ (*).

16. (Fig. 3). Soient α'', β'', γ'' les milieux des droites qui joignent les pieds H_a, H_b, H_c des hauteurs du triangle ABC. Ces points étant sur



les médianes antiparallèles, *les droites* $\beta''\gamma''$, $\gamma''\alpha''$, $\alpha''\beta''$ *rencontrent le périmètre de* ABC *en six points d'une même circonférence dont le centre* ω' *est sur la droite* KO *et coïncide avec le centre du cercle inscrit à* $\alpha''\beta''\gamma''$. (Voir fin du n° 14).

Les angles $\gamma''EA$, $\gamma''H_bC$ étant égaux à ABC, on a $\gamma''E = \gamma''H_b = \alpha''\beta''$; de même $\gamma''N = \alpha''\beta''$, $\beta''D = \beta''M = \gamma''\beta''$, $\alpha''F = \alpha''P = \beta''\gamma''$. On

(*) *Nouvelles Annales*, année 1873, p. 264. Les droites NM, FE, DP sont proportionnelles à a^2, b^2, c^2 et la distance $K\omega = \sqrt{R^2 - 3\overline{DE}^2} = R\sqrt{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

voit, par là, comment, étant donné le triangle $\alpha''\beta''\gamma''$, on peut définir l'hexagone inscriptible EFPDMN (*).

On vient de trouver $\gamma''E = \gamma''N = \gamma''H_b = \gamma''H_a$; par suite, le triangle EH_aH_b est rectangle. Donc *les projections des pieds des hauteurs d'un triangle* ABC, *sur les côtés de ce triangle, sont six points d'une même circonférence* (**).

Soient H_1, H_2, H_3 les orthocentres des triangles AH_bH_c, BH_cH_a, CH_aH_b. *Les droites* H_aH_1, H_bH_2, H_cH_3 *passent par* ω' *et y sont divisées en parties égales* (***) ; car la droite $\alpha''\omega'$, par exemple, menée par le milieu de H_bH_c parallèlement à H_bN, H_cM passe par les milieux de H_bH_2, H_cH_3.

Considérons maintenant $H_aH_bH_c$ comme étant le triangle *primitif* : A, B, C seront les centres des cercles ex-inscrits, et les droites PF, DM, NE passeront par les points de contact *extérieurs* de ces cercles et des côtés de $H_aH_bH_c$ (les triangles AaH_b, AmH_b sont équiangles). Nous pouvons donc dire que *les polaires des sommets d'un triangle* $H_aH_bH_c$ *par rapport aux cercles ex-inscrits rencontrent les bissectrices extérieures en six points d'une circonférence ; ces droites forment un triangle* $\alpha\beta\gamma$ *homologique à* $H_aH_bH_c$, *le centre d'homologie étant, à la fois, l'orthocentre de* $H_aH_bH_c$, *le centre du cercle circonscrit à* $\alpha\beta\gamma$ *et le symétrique du centre du cercle* ABC *par rapport à* ω' (†). Pour démontrer la dernière propriété, il suffit de remarquer que, EH_a et DH_a étant deux hauteurs du triangle αDE, la droite αH_a est perpendiculaire à DE et parallèle à AO.

17. Pour terminer, nous énoncerons encore la propriété suivante qui nous a été communiquée par M. Edm. Van Aubel : *Le centre des médianes antiparallèles d'un triangle* ABC, *celui du triangle orthocentrique et l'orthocentre de* ABC *sont trois points en ligne droite.* J. NEUBERG.

(*) Les développements qui précèdent, nous dispensent d'insérer des solutions de la question 9, par MM Pisani, Rocchetti et Visalli Saya. Ces solutions qui sont, en grande partie, trigonométriques, sont exactes, mais un peu longues ; de plus, elles ne renferment pas la relation remarquable des triangles ABC, $\alpha''\beta''\gamma''$.

(**) Comparer CATALAN, *Théorèmes et Problèmes*, 6e édition, p. 133 et *Nouvelle Correspondance*, t. VI, p. 183.

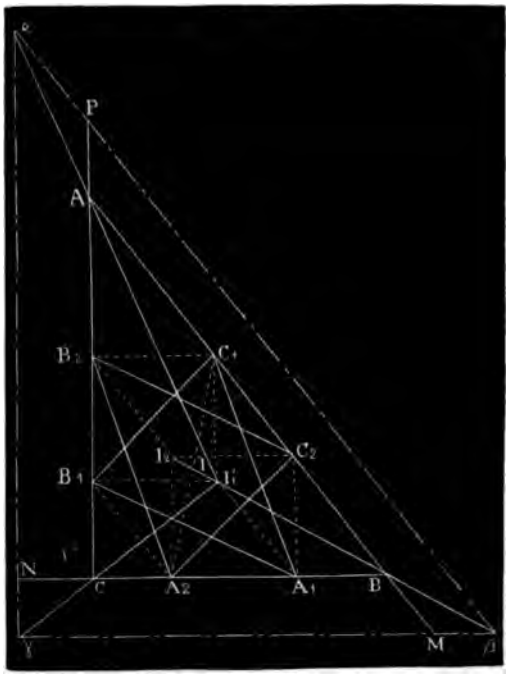
(***) Comparer *Mathesis*, p. 91.

(†) Ce théorème a été proposé au Concours d'Agrégation des Lycées, en 1873. Il en a paru une démonstration trigonométrique par M. Gambey dans les *Nouvelles Annales*, année 1874, p. 43, une démonstration géométrique par nous dans la *Nouvelle Correspondance*, t. 1, p. 44, et une démonstration analytique par M. Greiner dans les *Archives de Grunert-Hoppe*, t. 61, p. 225.

*SUR UN HEXAGONE ÉQUILATÉRAL, INSCRIT A UN TRIANGLE DONNÉ.

M. Jeřábek, de Telč (Moravie), nous adresse au sujet de la question 20(*), une note que nous croyons utile de résumer.

Prenons, sur les côtés AB, BC, CA du triangle ABC, les longueurs égales BM = CN = AP et menons par M, N, P des parallèles à BC, CA, AB ; ces droites forment un second triangle $\alpha\beta\gamma$. Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ se coupent en un même point I_1, tel que les lignes I_1A_1, I_1B_1, I_1C_1 paral-



lèles à AB, BC, CA sont égales entre elles. Si, par M, N, P, on mène des parallèles à CA, AB, BC, on obtient un second point I_2 tel que les lignes I_2A_2, I_2B_2, I_2C_2 parallèles à CA, AB, BC sont égales entre elles.

(*) Question 20 : *Trouver dans le plan d'un triangle* ABC, *un point tel que les trois parallèles aux côtés menées par* X *et limitées au périmètre de* ABC *soient égales entre elles.* Voir p. 148, la solution de M. Brocard.

On voit que M. Jeřábek donne, de la question 20, une interprétation différente de la nôtre (*). Néanmoins sa communication est très intéressante; elle nous a conduit à une nouvelle construction du centre des parallèles égales, et à quelques jolies propositions.

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les distances des points I_1, I_2 aux côtés du triangle ABC, (d_1, d_2) les longueurs I_1A_1, I_2A_2 ; on a

$$x_1 = d_1 \sin B, \quad y_1 = d_1 \sin C, \quad z_1 = d_1 \sin A.$$

D'où

$$\frac{x_1}{b} = \frac{y_1}{c} = \frac{z_1}{a} = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{ab + bc + ca} = \frac{2S}{ab + bc + ca},$$

$$d_1 = \frac{x_1}{\sin B} = \frac{2Sb}{\sin B_1 (ab + bc + ca)} = \frac{abc}{ab + bc + ca},$$

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

De même

$$\frac{x_2}{c} = \frac{y_2}{a} = \frac{z_2}{b} = \frac{2S}{ab + bc + ca},$$

$$\frac{1}{d_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d_1}.$$

La droite AI_1 divise BC dans le rapport des aires des triangles I_1BA, I_1CA ou dans le rapport $cz_1 : by_1 = ac : bc$. Il résulte de là que les coordonnées barycentriques de I_1 sont proportionnelles à $\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$, celles de I_2 à $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}$. Le point I_3 dont les coordonnées sont proportionnelles à $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ est le centre des parallèles égales du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de ABC; par suite, le triangle $I_1I_2I_3$ a même centre de gravité G que ABC, et le symétrique I_4 de G par rapport au milieu I de I_1I_2 est le centre des parallèles égales de ABC. Ces parallèles ont pour valeur commune $2d_1$.

De l'égalité $d_1 = d_2$, on conclut facilement que les figures $I_1C_1B_2B_1$, $I_1B_1A_2A_1$,... sont des losanges. Par conséquent : *à tout triangle* ABC, *on*

(*) Voir la note p. 191.

peut inscrire deux triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *dont les côtés sont parallèles aux bissectrices de* ABC ; *le centre du cercle circonscrit à l'un de ces triangles est le point de concours des hauteurs de l'autre* (*) ; *ces triangles ont même cercle des neuf points et leurs sommets appartiennent à un hexagone équilatéral inscrit à* ABC *et à côtés opposés parallèles.*

Considérons le triangle $A_1B_1C_1$ comme *fondamental* et soient a_1, b_1, c_1 les longueurs de ses côtés, a', b', c' les côtés du triangle orthocentrique. Les côtés de $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ appartiennent à un hexagone dont les côtés sont proportionnels aux produits a_1a', b_1b', c_1c' et qui a pour aire $d_1 \dfrac{a'b' + b'c' + c'a'}{a' + b' + c'}$. (**)

D'une seconde communication que nous venons de recevoir de M. Jeřábek, nous extrayons d'abord ce joli théorème : *Si l'on mène les droites* $A\beta'$, $B\gamma'$, $C\alpha'$ *respectivement parallèles à* BC, CA, AB *et égales à* CA, AB, BC, *les droites* $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ *se coupent en un même point* I_1 ; puis cette construction de l'hexagone équilatéral inscrit à ABC : *Prolongeons* AB *et* AC *de* BD = CE = BC *et menons les droites* DF, EH *parallèles à* AC, AB *et égales à* BC ; *les droites* AF, AH *couperont* BC *en deux sommets* A_2, A_1, *de l'hexagone inscrit à* ABC. (J. N.)

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Définition du mot limite.

1. *Définition du mot limite, d'après Duhamel.* Dans les *Éléments de Calcul infinitésimal* (Livre I, n° 6). Duhamel donne la définition suivante du mot *limite* : « Nous appelons *limite d'une variable, une quantité constante dont le variable approche indéfiniment sans jamais l'atteindre.* » Dans l'ouvrage intitulé : Des *Méthodes dans les Sciences de raisonnement*, 2e partie, n° 68, il précise cette définition en y ajoutant ces mots : La quantité variable n'atteint jamais cette valeur fixe appelée sa limite, mais « *sa différence avec elle diminue de manière à pouvoir devenir et*

(*) Comparer CATALAN, *Théorèmes et Problèmes*, 6me édition, p. 88.

(**) Ces propriétés nous ont été communiquées, il y a déja quelque temps, par M. Edm. Van Aubel.

rester ensuite au-dessous de toute grandeur désignée quelque petite qu'elle soit. »

D'après cela, si nous appelons X la variable et A sa limite, la différence $D = X - A$, prise en valeur absolue, jouit des propriétés suivantes : 1° Ne jamais s'annuler ; 2° devenir plus petite qu'une quantité ε, assignée d'avance, si petite qu'elle soit ; 3° rester plus petite que cette quantité ε.

Cette définition est admise, explicitement ou implicitement, à peu près par tous les auteurs modernes, au moins si la limite A est finie(*) et si X et A sont commensurables, *seul cas que nous examinions ici.* Néanmoins, dans les Éléments, on n'explique pas assez les trois propriétés de D, énoncées plus haut et cela peut induire les élèves en erreur dans certaines applications délicates de la méthode des limites. C'est pourquoi nous croyons devoir donner ici un petit commentaire de la définition de Duhamel (**).

2. *La différence* $D = X - A$ *ne doit jamais s'annuler.* Au premier abord, il semble que cette condition doive être supprimée, comme le veut Todhunter, dans son *Calcul différentiel*, n° 14. On peut citer, en effet, une foule d'expressions où la différence D entre la variable et sa limite passe par la valeur zéro.

Considérons, par exemple, la fraction $\frac{17}{32}$ et cherchons comment elle varie, quand on ajoute au dénominateur les carrés des nombres naturels, 1, 4, 9, 16, 25, etc., et au numérateur, les carrés des nombres immédiatement supérieurs, 4, 9, 16, 25, 36 etc. On trouvera ainsi la suite de fractions

$$\frac{21}{33}, \frac{26}{36}, \frac{33}{41}, \frac{42}{48}, \frac{53}{57}, \frac{66}{68}, \frac{81}{81}, \frac{98}{96}, \frac{117}{113}, \frac{138}{132}, \text{ etc.}$$

La forme générale de ces fractions est

$$X = \frac{17 + (n+1)^2}{32 + n^2} = 1 + \frac{2n - 14}{32 + n^2} = 1 + \frac{2 - \frac{14}{n}}{\frac{32}{n} + n}.$$

(*) On dit qu'une variable X a une limite infinie, si [1 : X] a 0 pour limite, ou si [1 : X] peut, sans s'annuler jamais, devenir et rester plus petit qu'une quantité ε, assignée d'avance, quelque petite qu'elle soit.

(**) Nous développons ici quelques paragraphes de notre *Résumé d'analyse infinitésimale*. Nous espérons exposer peu à peu, dans *Mathesis*, une théorie élémentaire complète de la théorie des limites.

Pour n croissant sans cesse, cette expression varie de la manière suivante : d'abord elle va en croissant, atteint l'unité quand $n = 7$, continue à croître jusqu'à une valeur maxima, savoir $1 + \frac{1}{16}$, correspondant à $n = 16$, puis décroît sans cesse en se rapprochant de l'unité, qu'elle surpasse toujours d'une quantité comprise entre $\frac{2}{n}$ et $\frac{1}{n+2}$. Tous les géomètres diront évidemment que X a pour limite l'unité, dans le cas actuel, et pourtant $D = X - 1$, passe par zéro, quand $n = 7$.

Voici un second exemple, où D passe un nombre indéfini de fois par zéro. Représentons par $E(x)$, le plus grand entier contenu dans x, de manière que l'on ait, par exemple (*)

$E(2\frac{1}{2}) = 2$, $E(3\frac{1}{10}) = 3$, $E(3\frac{8}{10}) = 3$, $E(15) = 15$, $E(15\frac{1}{3}) = 15$.

Cela posé, soit

$$X = \frac{n - 2E(\frac{1}{2}n)}{n},$$

une expression où l'on donne successivement à n les valeurs 1, 2, 3, 4, etc. Les valeurs correspondantes de X seront :

$$\frac{1-0}{1}, \quad \frac{2-2}{2}, \quad \frac{3-2}{3}, \quad \frac{4-4}{4}, \quad \frac{5-4}{4}, \quad \frac{6-6}{6}, \quad \text{etc.},$$

c'est-à-dire, $X = 0$, quand n est pair, $X = \frac{1}{n}$ quand n est impair. Si n croît indéfiniment, tous les géomètres diront que X a pour limite 0; cependant 0 est une valeur atteinte un nombre indéfini de fois par la variable (**).

On peut multiplier ces exemples autant qu'on le veut. Faut-il en conclure qu'il y a lieu de supprimer de la définition de la limite les mots :

(*) Autre exemple : $457 = 100\,E(\frac{457}{100}) + 10\,E(\frac{57}{10}) + E(7)$.

(**) Autre exemple susceptible d'une représentation graphique intéressante : $y = \sin \frac{1}{2}\pi x : x$. Cette quantité, qui a pour limite *zéro*, quand x croît indéfiniment, passe par *zéro* un nombre indéfini de fois, pour $x = 2, 4, 6$, etc. Cet exemple néanmoins ne vaut pas celui donné dans le texte, parce qu'il suppose connue la définition de la longueur d'un arc, et il est difficile de bien préciser celle-ci, sans s'appuyer sur la méthode des limites elle-même. Absolument parlant, au début d'un exposé de la méthode des limites, on est forcé d'éviter toute considération de fonctions continues, ou de courbes continues, puisque l'on ne peut rigoureusement les définir, sans recourir aux principes sur les limites.

sans jamais l'atteindre? Pas du tout. Selon nous, il faut simplement dire, d'une manière explicite, le sens réel attaché à ces mots.

Ce sens est le suivant. Lorsque dans une question de mathémathiques, on cherche la limite d'une variable X, cette variable est toujours exprimée au moyen d'une ou plusieurs autres, n, par exemple, dans les cas particuliers que nous venons de traiter. Le mode de variation de cette variable, principale ou *indépendante*, au moyen de laquelle X est exprimé (dont X est *fonction*, comme on dit), est *donné*, par hypothèse, dans l'énoncé de la question : ainsi, plus haut, n ne prenait que des valeurs entières positives et allait sans cesse en croissant. *En outre*, par hypothèse encore, il y a une certaine valeur que cette variable ne peut atteindre : dans les exemples précédents, la variable n ne peut pas devenir infinie, puisqu'un nombre infini implique contradiction(*). Eh bien, c'est cette impossibilité pour la variable indépendante, d'atteindre certaines valeurs, qui a fait dire, *métaphoriquement*, que X ne peut pas atteindre la valeur limite A correspondante, dont, cependant, elle s'approche autant qu'on le veut, quand la variable indépendante tend vers sa valeur inaccessible.

On a donc transporté à X, variable dépendante, ce qui, à la rigueur, ne doit s'entendre que de la variable indépendante au moyen de laquelle elle est exprimée (**).

3. *La différence* D *doit devenir et rester au-dessous de toute grandeur assignée* E, *quelque petite qu'elle soit.* On comprend aisément le sens précis de ces deux propriétés de D, du moment que l'on sait que X dépend d'une autre variable, dont le mode de variation est donné par hypothèse. Quand cette variable indépendante prend les valeurs qui lui sont

---

(*) Le mot infini, en mathématiques, est toujours employé dans un sens conventionnel, comme on s'en aperçoit en analysant les phrases où entre ce mot. Dire que n tend vers l'infini, signifie que $[1 : n]$ tend indéfiniment vers 0, sans s'annuler jamais.

(**) Mieux encore : soient x la variable indépendante, a la valeur qu'elle ne peut atteindre, y la variable dépendante, ayant pour limite b, quand x tend indéfiniment vers a, d'après le mode de variation qui lui est assigné. L'ensemble des deux variables (x, y), ne peut atteindre le couple de valeurs (a, b). Traduction graphique : un point mobile qui parcourt la courbe ayant pour coordonnées courantes x et y, n'atteint jamais le point (a, b).

assignées successivement par sa loi de variation, il faut qu'à partir de l'une d'elles, toutes les valeurs correspondantes de X soient inférieures à la quantité ε, donnée d'avance, et cela, quelque petit que soit ε.

Dans le second exemple, la différence $D = X - A$ est égale à X même, c'est-à-dire à $\frac{1}{n}$ ou à 0. Donc, pour que D soit inférieure, par exemple, à $\frac{1}{1000}$, il suffit de faire n égal à 1001; quand n continue à croître, D *reste* inférieure à $\frac{1}{1000}$.

Dans le second exemple, si l'on fait $\varepsilon = \frac{1}{20}$, on trouve que la différence

$$D = \frac{17 + (n+1)^2}{32 + n^2} - 1 = \frac{2n - 14}{32 + n^2},$$

est inférieure à ε, en valeur absolue, pour

$$n = 6, 7, 8, 9, 10; 30, 31, 32, \text{etc.}$$

La différence D *devient* donc inférieure à ε, déjà pour $n = 6$; mais elle ne *devient et reste* inférieure à cette quantité, qu'à partir de $n = 30$.

Remarques I. On énonce quelquefois la seconde propriété de D, en disant que X *s'approche sans cesse* de la limite A. Prise à la lettre, cette expression est inexacte : d'abord il se peut que X dans ses variations, tantôt se rapproche de A, puis s'en éloigne, pour s'en rapprocher encore. C'est ce qui arrive dans le second exemple. Ensuite, une variable X, en même temps qu'elle s'approche de sa limite, même dans le sens strict du mot, peut s'approcher sans cesse, en même temps, d'autres quantités. Ainsi, dans le second exemple, quand n a dépassé la valeur 7, on peut dire, à la rigueur, que X s'approche sans cesse de $\frac{1}{2}$ ou de $\frac{3}{4}$, en même temps que de sa limite 1. Il vaut donc mieux s'exprimer comme Duhamel, en disant que X *s'approche* INDÉFINIMENT de A.

II. Il faut se garder de croire que la troisième propriété de D soit une conséquence de la deuxième. Il existe des variables dont la différence avec une quantité fixe peut *devenir* aussi petite qu'on le veut, sans que néanmoins elles aient cette quantité pour limite, parce que cette différence ne *reste* pas aussi petite qu'on le veut. Il est facile d'en donner des exemples élémentaires.

Soit, par exemple,

$$X = \frac{(n+1)^2}{n} - 2E\left(\tfrac{1}{2}n\right) \quad \text{ou} \quad 2 + \frac{1}{n} + n - 2E\left(\tfrac{1}{2}n\right).$$

Donnons à n, les valeurs successives 1, 2, 3, 4, etc.; X deviendra successivement

$$2+\frac{1}{1}+1-0,\quad 2+\frac{1}{2}+2-2,\quad 2+\frac{1}{3}+3-2,\quad 2+\frac{1}{4}+4-4,\ \text{etc.}$$

c'est-à-dire que $X = 2 + \frac{1}{n}$ ou $3 + \frac{1}{n}$, suivant que n est pair ou impair. Il est donc facile d'assigner une valeur de n assez grande pour que la différence $X - 2$, *devienne* plus petite qu'une quantité ε assignée d'avance, $\frac{1}{1000}$, par exemple. Il suffira, pour cela de prendre n pair et supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, 1000 dans l'hypothèse actuelle. Mais la différence $X - 2$ ne restera pas inférieure à $\frac{1}{1000}$: pour toutes les valeurs impaires ultérieures de n, cette différence sera plus grande que $\frac{999}{1000}$. On conclut de là que X n'a pas pour limite 2. D'ailleurs il est aisé de voir que X n'a pas de limite.

4. *Résumé.* Résumons la discussion précédente touchant la définition de la limite A, finie et commensurable, d'une variable X :

Soit une variable X, dépendant d'une autre variable n; celle-ci, prend successivement les valeurs n_1, n_2, n_3,..., n_p,..., mais ne peut atteindre une certaine valeur a, finie, ou infinie. Si a est infinie la quantité $[1 : n_p]$, et, si a est finie, la différence $d = n_p - a$, entre la valeur a, inaccessible à n, et les valeurs successives n_p de n, devient et reste plus petite qu'une quantité donnée d'avance, si petite qu'elle soit et n'est jamais nulle, d'après l'hypothèse. Cela posé, on dit que X a, pour cette valeur inaccessible a de n, une valeur limite A, dite aussi inaccessible par convention, si la différence $D = X - A$, prise en valeur absolue, est plus petite qu'une quantité ε, donnée d'avance, si petite qu'elle soit, pour une valeur n_p de n, et pour toutes les valeurs que l'on doit donner ultérieurement à cette variable. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 7.

Ramener la résolution d'une équation du quatrième degré à celle d'une équation réciproque.

Soit l'équation du quatrième degré

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

La substitution

$$x = m + ny$$

donne

$$n^4y^4 + (4m + a)\,n^3y^3 + (6m^2 + 3am + b)\,n^2y^2 + nf'(m)\,y + f(m) = 0;$$

pour que cette équation soit réciproque, il faut et il suffit que l'on ait les relations

$$f(m) = n^4,$$
$$f'(m) = (4m + a)\,n^3.$$

L'élimination de n ou de n^3 donne, pour déterminer m, l'équation

$$(8c - 4ab + a^3)\,m^3 + (16d + a^2b + 2ac - 4b^2)\,m^2 + (a^2c + 8ad - 4bc)\,m + a^2d - c^2 = 0.$$

Si la proposée est elle-même réciproque, il est clair que l'équation en m doit se réduire. Effectivement, il suffit de prendre $d = 1$ et $c = a$.

L'hypothèse des coefficients égaux et de signes contraires à égale distance des extrêmes est inadmissible sauf dans des cas particuliers, comme il est aisé de le voir.

H. Brocard.

Note. Considérons les quatre racines de l'équation $f(x) = 0$ comme étant les distances, à une même origine O, de quatre points en ligne droite, X_1, X_2, X_3, X_4. On peut trouver, sur la même droite, un point O′ tel que

$$O'X_1 \cdot O'X_2 = O'X_3 \cdot O'X_4.$$

Ce point, milieu de la distance des points X_5, X_6 qui divisent les segments X_1X_2, X_3X_4 harmoniquement, se trouve sur l'axe radical de deux cercles quelconques ayant pour cordes X_1X_2 et X_3X_4. Soit $K = O'X_1 \cdot O'X_2$. Déterminons quatre nouveaux points Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, tels que l'on ait

$$O'Y_1 = \frac{O'X_1}{\sqrt{K}},\quad O'Y_2 = \frac{O'X_2}{\sqrt{K}},\quad O'Y_3 = \frac{O'X_3}{\sqrt{K}},\quad O'Y_4 = \frac{O'X_4}{\sqrt{K}};$$

nous aurons

$$O'Y_1 \cdot O'Y_2 = O'Y_3 \cdot O'Y_4 = 1 ;$$

et les distances $O'Y_1$, $O'Y_2$, $O'Y_3$, $O'Y_4$ seront les racines d'une équation réciproque. On voit que celle-ci s'obtiendra en transportant l'origine et en opérant ensuite une transformation homothétique, c'est-à-dire, en posant

$$y = \frac{x - m}{n} .$$

Cette interprétation géométrique montre en même temps pourquoi m dépend d'une équation du troisième dégré et n d'une équation du sixième degré, à exposants pairs. Les valeurs de m sont les abscisses des points centraux des trois involutions déterminées par les couples (X_1X_2, X_3X_4), (X_1X_3, X_2X_4), (X_1X_4, X_2X_3).

Si les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont imaginaires, représentons-les par les chemins inclinés $\overline{OX_1}$, $\overline{OX_2}$, $\overline{OX_3}$, $\overline{OX_4}$ (voir *Mathesis*, p. 123). La réduction de l'équation proposée à une équation réciproque revient : 1° à transporter l'origine au centre de similitude O′ des figures semblables construites sur X_1X_3 et X_4X_2 ; 2° à construire une figure semblable à $X_1X_2X_3X_4$, le centre de similitude étant en O′. (J. N.)

×Question 50.

Étant données deux circonférences O, O′ *qui se coupent aux points* B, C, *on joint un point quelconque* A *de la première aux extrémités de la corde commune ; soient* C′, B′ *les points où les droites* AB, AC *rencontrent la circonférence* O′. *Démontrer que le centre du cercle circonscrit au triangle* AB′C′, *le point de concours des hauteurs, le centre de gravité et le centre du cercle des neuf points décrivent des circonférences ; la circonférence* AB′C′ *touche une circonférence fixe ; le centre du cercle inscrit au triangle* AB′C′ *parcourt une conchoïde de cercle.* (J. Neuberg).

Soient R, R′ les rayons OB, O′B et D la distance OO′ des centres.

1° *Enveloppe de* B′C′. L'angle B′CC′ étant la somme des angles constants CAB, CC′B, la corde B′C′ est de longueur invariable; elle a donc pour enveloppe une circonférence de centre O′.

Soient BK le prolongement de OB, O′M et O′L perpendiculaires à B′C,

et à BK ; on peut remarquer que $O'M = BL = \frac{1}{2} BK$, $B'C' = 2O'L$ (*).

2° *Lieu du centre* O'' *de la circonférence* AB'C'. Menons les tangentes AT, AT' aux circonférences O, O''. A cause de

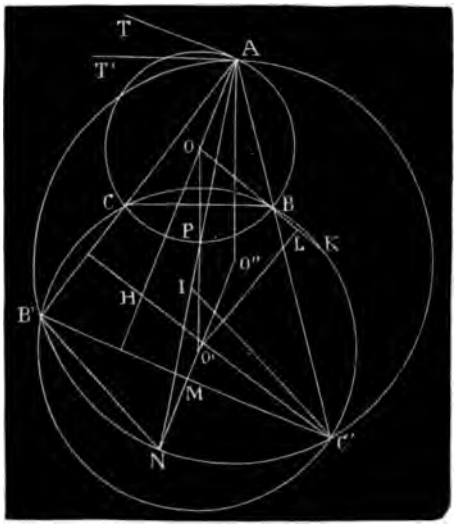
$$\text{angle } TAC = ABC = AB'C', \qquad \text{angle } T'AB' = AC'B' = ACB,$$

AT et AT' sont parallèles à B'C' et à BC. On déduit de là, que AOO'O'' est un parallélogramme ; donc le rayon de la circonférence O'' est égal à D, et le centre O'' décrit une circonférence de rayon R et de centre O'.

3° *Enveloppe de la circonférence* AB'C'. On a

$$O'N = O''N - O'O'' = D - R = O'P;$$

donc la circonférence AB'C' a pour enveloppe une circonférence de centre O' et de rayon $O'P = D - R$.



4° *Lieu du point de concours* H *des hauteurs*. AO est une hauteur de AB'C' (2°), et $AH = 2O''M$; d'où

$$R + OH = 2(R + O'M), \qquad OH = R + 2O'M = OB + BK.$$

Par conséquent, H décrit une circonférence de centre O et de rayon OK.

5° *Lieux du centre de gravité* G *et du centre* ω *du cercle des neuf points*. Les points G, ω divisent HO'' dans des rapports constants ; OH et O'O'' sont des rayons parallèles de circontérences décrites par les

(*) Pour le voir, il suffit d'amener le point A en B.

points H et O''. On conclut, de là, que G et ω décrivent également des circonférences, dont les centres divisent OO' dans les rapports 2 : 1 et 1 : 1, et dont les rayons valent $\frac{1}{3}$ (2O'O'' + OH) et $\frac{1}{2}$ (O'O'' + OH).

Le cercle des neuf points ayant un rayon constant, égal à $\frac{1}{2}$D, a pour enveloppe une circonférence.

6° *Lieu du centre* I *du cercle inscrit.* La bissectrice AI passe par le milieu P de l'arc CPB et le milieu N de l'arc BN'C. Les points P et N appartiennent à la circonférence de centre O' et de rayon D — R; d'ailleurs NI, égal à NB', est constant. Donc I décrit une conchoïde du cercle(*) qui est l'enveloppe de la circonférence AB'C'; le pôle est en P.

Le centre du cercle ex-inscrit à AB'C', qui touche B'C' intérieurement parcourt la même conchoïde que I. Les centres des deux autres cercles ex-inscrits décrivent également une même conchoïde. (J. N.)

M. Jamet, professeur à Nantes, nous a envoyé, de la même question, une solution exacte qui est moins simple et moins *précise* que la précédente. M. Jeřábek nous fait remarquer que le pied de la hauteur abaissée de A sur BC parcourt aussi une conchoïde; en effet, ce pied décrit la podaire de O par rapport à l'enveloppe de BC.

Question 69.

Soient AA', BB', CC' *les hauteurs d'un triangle* ABC, A'', B'', C'' *leurs milieux. Démontrer que l'aire du triangle* A''B''C'' *vaut le quart de celle de* A'B'C'. (E. Hain).

Plus généralement: *si trois droites quelconques, issues des sommets d'un triangle* ABC, *coupent les côtés en* A', B', C', *les milieux* A'', B'', C'' *de* AA', BB', CC' *sont les sommets d'un triange dont l'aire vaut le quart de celle de* A'B'C'.

En effet, les points A'', B'', C'' sont situés sur le périmètre du triangle qui a pour sommets les milieux α, β, γ des côtés de ABC. Par un théorème connu

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{BA' \cdot CB' \cdot AC' + CA' \cdot AB' \cdot BC'}{AB \cdot BC \cdot CA}, \qquad (1)$$

$$\frac{A''B''C''}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\gamma A'' \cdot \alpha B'' \cdot \beta C'' + \gamma B'' \cdot \beta A'' \cdot \alpha C''}{\alpha\beta \cdot \beta\gamma \cdot \gamma\alpha}. \qquad (2)$$

(*) Ou un limaçon de Pascal (voir p. 44).

Les deuxièmes membres des égalités (1) et (2) sont égaux; car $BA' = 2\gamma A''$, $CB' = 2\alpha B''$, etc. D'ailleurs $ABC = 4\alpha\beta\gamma$; donc $A'B'C' = 4A''B''C''$. (Edm. Van Aubel).

Solution trigonométrique par M. Brocard.

La formule (1) est due, croyons-nous, à Steiner. On peut encore la mettre sous la forme

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{\alpha}{\alpha+\alpha'}\cdot\frac{\beta}{\beta+\beta'}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+\gamma'} + \frac{\alpha'}{\alpha+\alpha'}\cdot\frac{\beta'}{\beta+\beta'}\cdot\frac{\gamma'}{\gamma+\gamma'},$$

$\frac{\alpha'}{\alpha}, \frac{\beta'}{\beta}, \frac{\gamma'}{\gamma}$, étant les rapports suivant lesquels les points A', B', C' divisent BC, CA, AB. Elle est très utile dans les applications. On en déduit, par exemple : 1° l'équivalence de deux triangles A'B'C', A''B''C'' inscrits à un même troisième ABC et tels que les sommets sont équidistants, deux à deux, des milieux des côtés de ABC; 2° l'équivalence de deux triangles inscrits A'B'C', A''B''C'', tels que les droites B'C'', C'A'', A'B'' sont parallèles à BC, CA, AB. (J. N.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**79.** Soient

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \theta = n,$$

$$N = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdots\alpha \times 1\cdot 2\cdots\beta \times \cdots \times 1\cdot 2\cdots\theta}.$$

Si deux, au moins, des nombres $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ sont *impairs*, N est *pair*.

Corollaire. Si m est *pair*, et que p soit *impair*,

$$C_{m,p} = \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}$$

est *pair*. (E. Catalan.)

80. Les nombres *combinatoires* :

$$C_{m,1},\quad C_{m,2},\quad C_{m,3}\ldots,\quad C_{m,m}$$

sont *tous impairs*, si $m = 2^k - 1$. Cette condition est *nécessaire*.

Exemples. 1° $m = 3 = 2^2 - 1$: 3, 3, 1;

2° $m = 5$: 5, 10, 10, 5, 1;

3° $m = 7 = 2^3 - 1$: 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

4° $m = 9$: 9, 36, 84,...,

5° $m = 15 = 2^4 - 1$: 15, 105, 455, 1365, 3003, 5005, 6435, 6435..... (E. Catalan.)

81. Le nombre $C_{m,p}$ ne contient pas le facteur premier λ si

$$m = a\lambda^k - 1 \qquad (a < \lambda). \qquad \text{(Mangon.)}$$

82. D'après le théorème de Fermat,

$$2^{p-1} - 1 = pN.$$

Comment doit-on prendre le nombre *premier* p, pour que N soit un carré ? (E. Catalan).

×**83.** Soient BH_b et CH_c deux hauteurs d'un triangle ABC, BD_b et CD_c deux bissectrices intérieures, E_b et E_c les points où les côtés AC et AB touchent le cercle inscrit, F_b et F_c les points où ces droites touchent respectivement les cercles ex-inscrits qui ont leurs centres sur BD_b et CD_c. Démontrer que les droites H_bH_c, D_bD_c, E_bE_c, F_bF_c concourent en un même point. (J. Neuberg.)

×**84.** Trois droites joignant les sommets du triangle ABC à un même point O, rencontrent les côtés opposés en (A_1, B_1, C_1), une droite quelconque en (A_2, B_2, C_2), une conique circonscrite à ABC en (A_3, B_3, C_3). Démontrer que

$$(OAA_1A_2) + (OBB_1B_2) + (OCC_1C_2) = 1,$$
$$(OA_1AA_3) + (OB_1BB_3) + (OC_1CC_3) = 1,$$

(ABCD) désignant le rapport anharmonique $\dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$. (J. Neuberg.)

×**85.** Soient : O, I les centres des cercles circonscrit et inscrit à un triangle ABC ; B'C', C'A', A'B' les tangentes menées en A, B, C au cercle O ; α, β, γ les centres des cercles inscrits aux triangles A'BC, AB'C, ABC' ; enfin $\alpha'\beta'\gamma'$ le triangle formé par les cordes communes aux cercles O et α, O et β, O et γ. Démontrer :

1° Que les diagonales de l'hexagone formé par les côtés des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ sont parallèles aux côtés de ABC, passent par I et touchent, chacune, deux des cercles α, β, γ ; 2° que le centre radical des cercles α, β, γ coïncide avec le centre du cercle inscrit au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ (Edm. Van Aubel) ; 3° que les droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ se coupent en un point dont les distances aux côtés du triangle ABC sont proportionnelles aux carrés de ces côtés. (J. Neuberg.)

×**86.** Dans tout triangle ABC : 1° la droite qui joint les pieds E_a, E_b, E_c des bissectrices extérieures est perpendiculaire à la droite qui joint les centres I, O des cercles inscrit et circonscrit à ABC (E. Hain) ;

2° les droites qui joignent, deux à deux, les pieds D_a, D_b, D_c des bissectrices intérieures sont respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent O aux centres I_a, I_b, I_c des cercles ex-inscrits à ABC : la distance de O à la droite D_bD_c est égale à $R\sqrt{\frac{R-r_a}{R+2r_a}}$, R et r_a étant les rayons des cercles O, I_a. (J. NEUBERG.)

×**87.** Les droites AO, BO, CO rencontrent les côtés du triangle ABC en (A_1, B_1, C_1), ceux du triangle $A_1B_1C_1$ en (A_2, B_2, C_2), ceux du triangle $A_2B_2C_2$ en (A_3, B_3, C_3), etc. Démontrer

1° que

$$\frac{C_{n+1}A_n}{C_{n+1}B_n} = -\frac{\frac{OB_1}{BB_1} + K_n}{\frac{OA_1}{AA_1} + K_n}, \quad \text{où} \quad K_n = \frac{(-2)^n - 1}{3};$$

2° que

$$\frac{OA}{OA_n} = 2^n\left(1 + \frac{AA_1}{OA_1}K_n\right);$$

3° que le conjugué harmonique de A_1 par rapport à OA_{n-1} coïncide avec le conjugué harmonique de A_n par rapport à OA. (J. NEUBERG.)

×**88.** Étant donnés un triangle ABC et un point quelconque P, on mène les trois sécantes qui, limitées respectivement aux côtés des angles A, B, C, ont leur milieu en P. Trouver en fonction des coordonnées trilinéaires de P, l'équation de la conique qui passe par les extrémités des sécantes. (J. NEUBERG.)

×**89.** Si A, B, C, sont trois angles dont la somme algébrique est égale à un multiple impair de π, on a

$$\sin A \sin(A-B)\sin(C-A) + \sin B \sin(B-C)\sin(A-B) + \sin C \sin(C-A)\sin(B-C) = \sin 2A \sin 2B \sin 2C - \sin A \sin B \sin C.$$

(S. REALIS.)

×**90.** Si A, B, C sont trois angles dont la somme algébrique est égale à un multiple impair de π, on a

$$\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ \text{séc } A & \text{séc } B & \text{séc } C \\ \text{cosec } A & \text{cosec } B & \text{cosec } C \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \cot 2A & \cot 2B & \cot 2C \\ \text{cosec } 2A & \text{cosec } 2B & \text{cosec } 2C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(S. REALIS.)

×**91.** Étant donnée une fraction ordinaire irréductible $\frac{a}{b}$, de dénominateur égal ou inférieur à n, trouver la fraction irréductible immédiatement supérieure aussi de dénominateur égal ou inférieur à n.

(STOUVENEL.)

92. Soient ABCDE.... L une courbe dont la concavité est tournée vers une droite al sur laquelle on a abaissé des perpendiculaires, équidistantes d'une quantité h, savoir :

$$aA = y_1, \quad bB = y_2, \quad cC = y_3, \ldots\ldots \quad lL = y_n.$$

L'aire $S = aABC\ldots\ Ll$ est donnée par la formule

$$S = T + \frac{1}{6}\frac{n}{n-1}hD \quad \text{(approximativement)},$$

$$T = h\left(\tfrac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right)$$

$$D = \frac{y_2 + y_{n-1}}{2} - \frac{y_1 + y_n}{2},$$

avec une erreur moindre que $\frac{5n-6}{6n-6}hD$. L'erreur est nulle, si la courbe est une parabole du deuxième ou du troisième degré. (P. M.)

93. Dans les mêmes hypothèses, sauf que le nombre des ordonnées est supposé $(2n + 1)$, on peut poser aussi approximativement

$$S = m' + hd - \tfrac{1}{3}hd',$$

en écrivant, pour abréger,

$$m' = h\left(y_1 + 2y_3 + 2y_5 + \cdots + 2y_{2n-1} + y_{2n+1}\right),$$

$$d = \frac{y_2 + y_{2n}}{2} - \frac{y_1 + y_{2n+1}}{2}, \quad d' = \frac{y_3 + y_{2n-1}}{2} - \frac{y_2 + y_{2n}}{2}.$$

L'erreur est plus petite que le terme complémentaire

$$hd - \tfrac{1}{3}hd',$$

et s'annule dans le cas où la courbe est une parabole du deuxième ou du troisième degré. (P. M.)

×**94.** Étant données trois circonférences, mener à l'une d'elles en un point B, à déterminer, une tangente rencontrant les deux autres en deux points A, C, tels que AB = BC.

95. Trouver l'équation des lignes de courbure d'une surface du second degré ayant pour équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0.$$

*96. Trouver, sur une droite donnée, un segment qui soit vu de deux points donnés sous des angles donnés.

97. Soient ABC, $A_1B_1C_1$ deux triangles homologiques, tels que les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un même point O et rencontrent BC, CA, AB respectivement en A_2, B_2, C_2. Pour que les triangles ABC, $B_1C_1A_1$ (ou $C_1A_1B_1$) soient également homologiques, on doit avoir

$$(AA_2OA_1)\,(BB_2OB_1)\,(CC_2OC_1) = 1,$$

(AA_2OA_1) désignant le rapport anharmonique $\dfrac{OA}{OA_2} : \dfrac{A_1A}{A_1A_2}$. (J. N.)

98. Étant donnés deux droites AB, CD et un point M, on construit le triangle CDM_1 semblable à ABM, le triangle CDM_2 semblable à ABM_1, le triangle CDM_3 semblable à ABM_2, et ainsi de suite. Démontrer que les points M, M_1, M_2, M_3,... appartiennent à une même spirale logarithmique. (J. N.)

99. Soient AA', BB', CC' les hauteurs d'un triangle ABC, H leur point d'intersection; A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés du triangle, A_2, B_2, C_2 les milieux des segments AH, BH, CH. Démontrer : 1° que les droites de Simson des sommets de l'un des deux triangles A'B'C', $A_1B_1C_1$ par rapport à l'autre triangle concourent au centre de gravité du périmètre (*) du triangle A'B'C'; 2° que le triangle, formé par les droites de Simson des points A_2, B_2, C_2 par rapport au triangle A'B'C', a pour centre d'homologie avec ABC le centre de gravité de A'B'C', et pour point de concours des hauteurs le centre de gravité du périmètre de A'B'C'. (Edmond Van Aubel.)

100. Sur deux côtés A_2A_3, A_3A_1 d'un triangle $A_1A_2A_3$ comme hypoténuses on construit deux triangles rectangles $A_2B_1A_3$, $A_3B_2A_1$, semblables et semblablement orientés; sur B_2B_1, on construit le triangle B_2KB_1 semblable à $A_2B_1A_3$, mais inversement orienté. Démontrer que le point K divise A_1A_2 dans le rapport $\overline{A_3B_2}^2 : \overline{A_3B_1}^2$ (**). (H. Van Aubel.)

(*) Centre du cercle inscrit au triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de A'B'C'.

(**) Ce théorème est une généralisation d'une proposition due à M. Neuberg (*Nouvelle Correspondance*, t. IV, p. 142; *Mathesis*, p. 164.). (H. V. A.)

TABLE DES AUTEURS.

Algrain, 160.
Archimède, 178
Baehr, 58
Barbarin, 85.
B. S., 47, 91, 114.
Barzin, 131.
Bertrand, 156.
Biandsutter, 8.
Bienaymé, 10.
Boncompagni. 144, 151.
Breithof. 158.
Breton de Champ, 55.
Brocard, H., 42, 71, 113, 118, 122, 128, 148, 175, 186. 198, 204.
Catalan, E., 11, 58, 87, 121, 139.
Cesáro, E., 51, 99, 127, 143.
Charlier, O., 58.
Clevers, E., 28, 43.
Darboux, 57.
De Comberousse, Ch ,160.
De la Cuvellerie, 88.
De Moor, 159
Doneux, 88.
Dostor, 156, 157.
Duyckaerts, 117, 131, 166.
Englert, 10.
Euzet, 110.
Fouquet, F., 76, 113, 116, 131.
Gelin, 145.
Gerondal, 88.
Gerono, 55.
Gibert, 155.
Gilbert, Ph., 97.
Günther, S., 61, 81.
Hain, E., 158.
Heiberg, 178.
Hermite, C., 37.
Hudson, 30.
Interdonato, P., 166, 167.
Jamet, 59, 115, 179, 180, 202.
Jeřábek, 191, 201.
Laisant, A., 167.
Lambert, A., 131, 167.
Lemoine, E., 129.
Liebrecht, 38.
Lionnet, 9.
Lucas, Ed.. 65, 134.
M., 117.
Mansion, P , 1, 3, 7, 11, 17, 23, 33, 38, 39, 67, 80, 103, 110, 129, 139, 144, 145, 169, 181, 193 et le supplément p. 1-64.
McLellan, 70.
Mister, J., 55, 137, 182.
Namur, A., 39.
Navet, 131
Neuberg, J., 1, 7, 16, 26, 32, 55, 60, 61, 63, 66, 72, 73, 79, 87, 89, 90, 106, 109, 113, 115, 118, 127, 130, 132, 147, 149, 153, 157, 158, 165, 166, 173, 185, 191, 199, 200, 202, 204
Niewenglowski, 155.
d'Ocagne, M., 109.
Petersen, 155
Pisani, F., 113, 118, 128, 130, 131, 145, 166, 179, 202.
Plateau, J., 89.
Prévost, 47, 58.
Pullich. A F., 161.
Realis, S., 75, 166, 176.
Rochetti, 131, 165, 166, 179.
Rouché, E., 160.
Ruex, P.. 29, 53, 61, 91.
Schaar, 68.
Schoonjans. 110.
Schoontjes, 160.
Serret, J., 55.
Serret, P., 55, 130.
T. G., 156.
Teixeira. 23.
Van Glabbeke, A., 29, 94, 113, 116.
Van Aubel, E., 72, 78, 90, 117, 163, 203.
Van Aubel, H., 90, 91, 93.
Verhelst, E., 42, 47, 61, 77.
Verstraeten, T., 49.
Visalli Saya, P., 165, 179.

ESQUISSE DE L'HISTOIRE DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

Extrait du **Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale**, par **P. Mansion**, professeur à l'Université de Gand.

CHAPITRE I. Inventeurs et précurseurs.

1. Inventeurs. La recherche des aires et des longueurs des lignes courbes, des volumes et des aires des surfaces courbes et celle de leurs centres de gravité avaient été ramenées par Archimède (287-212), dans l'antiquité, par Fermat (1601-1665) et d'autres géomètres des deux premiers tiers du XVII^{e} siècle, au calcul des *limites de sommes d'infiniment petits*; la détermination des tangentes aux courbes planes et d'autres questions connexes avaient été réduites aussi à celle de la *limite du rapport de deux infiniment petits* ayant entre eux une relation connue. Dans le dernier tiers du XVII^{e} siècle, Leibniz (1646-1716) et Newton (1642-1727) découvrirent l'un et l'autre, que *le problème des tangentes et celui des quadratures sont inverses l'un de l'autre*, et, imaginant chacun un algorithme spécial pour traiter les questions de ce genre, inventèrent ainsi *le calcul différentiel* et le *calcul intégral*.

Ils firent cette découverte indépendamment l'un de l'autre et sous des formes différentes, comme l'a reconnu Newton, dans un passage célèbre des *Principes* (*Principia mathematica philosophiae naturalis*, Lib. II, prop. VII, Scholium, éd. de 1687 et de 1713; remplacé par une autre remarque dans celle de 1726) : « In litteris, quae mihi cum Geometra peritissimo G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi maximas et minimas, ducendi tangentes et similia peragendi, quae in terminis surdis aeque ac rationalibus procederet et litteris transpositis hanc sententiam involventibus (data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire

et vice versa) eandem *celarem*, rescripsit vir clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse et *methodum suam communicavit a mea vix abludentem praeterquam in verborum et notarum formulis (et idea generationis quantitatum)*. Nous donnons plus bas (ch. II) la traduction des premiers articles de Leibniz et de Newton sur le calcul différentiel.

Leibniz employait la méthode infinitésimale, la notation des différentielles et le signe sommatoire allongé pour les intégrales; il appelait la science nouvelle, *calcul différentiel* et *calcul intégral* ou *sommatoire*. Il en découvrit les principes un peu avant 1677 et les publia en 1684. Les développements ultérieurs du calcul infinitésimal sur le continent, à la fin du XVII[e] siècle et au commencement du XVIII[e], sont dus surtout à lui et aux deux frères JACQUES (1654-1705) et JEAN BERNOULLI (1667-1748).

Newton employait la méthode des limites, une notation équivalente à celle des dérivées ($\dot{y}$, $\ddot{y}$, etc., pour y', y'', etc.) mais plus incommode, pour le calcul différentiel, et une notation inverse ($\acute{y}$, $\acute{\acute{y}}$, etc. pour $\int y dx$, $\int dx \int y dx$) pour désigner les intégrales. Il appelait la nouvelle branche des mathématiques créée par lui, *calcul direct* et *calcul inverse des fluxions* : fluxion d'une variable signifie *vitesse d'accroissement* de cette variable. Il découvrit les fondements de la méthode des fluxions un peu avant 1667 et les publia vingt ans plus tard, dans ses immortels *Principes*. Son principal continuateur, en Angleterre, fut MACLAURIN (1698-1746) dont le célèbre ouvrage *A Treatise of Fluxions* (1742; traduction française du P. Pezenas, 1749) contient, outre un grand nombre de recherches originales, un exposé rigoureux des principes, non seulement du calcul des fluxions, mais aussi de la méthode des limites, de celle des infiniment petits et des méthodes équivalentes des anciens.

Au XVIII[e] siècle, les deux plus grands analystes sont EULER (1707-1783) et LAGRANGE (1736-1813) qui déduisirent, des principes posés par Leibniz et Newton, toutes leurs conséquences naturelles, mais en obscurcissant parfois la clarté de ces principes mêmes, surtout dans la théorie des séries. Lagrange est l'inventeur du *Calcul des variations* au moyen duquel il a traité, d'une manière systématique, les problèmes relatifs aux maxima et minima des intégrales définies sur lesquels Euler avait auparavant publié un ouvrage spécial.

LEGENDRE (1752-1833) agrandit le domaine de l'analyse en appelant l'attention, plus que ses devanciers, sur trois espèces nouvelles de fonctions, les fonctions eulériennes, les fonctions sphériques, et surtout les

fonctions (ou plutôt les intégrales) elliptiques. Il en développa la théorie autant que possible, au moyen des ressources de l'analyse de son temps, et, à force de ténacité, découvrit, en particulier, sur les intégrales elliptiques de troisième espèce, des vérités nouvelles d'un abord extrêmement difficile.

Au XIX^e siècle, GAUSS (1777-1855) et surtout CAUCHY (1789-1857) réintroduisirent la rigueur dans l'exposé des principes généraux de l'analyse, et ouvrirent aux géomètres un champ illimité de recherches en créant la théorie générale des fonctions d'une variable imaginaire. ABEL (1802-1829) et JACOBI (1804-1851) appliquèrent cette théorie, d'une manière plus ou moins explicite, avant qu'elle eût reçu son plein développement, à l'étude des fonctions elliptiques, inverses de la première intégrale elliptique de Legendre; en outre, ils découvrirent les propriétés fondamentales d'une nouvelle espèce de fonctions, les fonctions abéliennes, plus compliquées que les précédentes, dont elles sont la généralisation. RIEMANN (1826-1866) appliqua aussi aux fonctions abéliennes la théorie générale des fonctions d'une variable imaginaire, qu'il avait approfondie plus que personne; CLEBSCH (1833-1872) enfin, rattacha leurs propriétés générales à la géométrie supérieure.

Aujourd'hui, HERMITE en France, WEIERSTRASS et KRONECKER en Allemagne, SYLVESTER et CAYLEY en Angleterre, BRIOSCHI en Italie, tiennent le sceptre de l'analyse mathématique.

2. Précurseurs. I. Dans l'antiquité, on peut regarder ARCHIMÈDE et même EUDOXE, EUCLIDE et PAPPUS comme des précurseurs de Newton et de Leibniz.

EUDOXE de Gnide (408-355) est l'auteur de la théorie des proportions entre grandeurs commensurables ou incommensurables exposée dans le cinquième livre des *Éléments* d'Euclide. C'est lui aussi qui a trouvé le rapport de la pyramide au prisme de même base et de même hauteur, et le théorème analogue sur le cône et le cylindre. Il est probable qu'on lui doit également les démonstrations rapportées dans le livre douzième des *Éléments* sur la proportionnalité de l'aire des cercles ou du volume des sphères au carré ou au cube de leurs diamètres.

EUCLIDE (vers 300 ans avant J.-C.) a exposé et étendu la théorie des irrationnelles du second degré (*Éléments*, Liv. X).

ARCHIMÈDE (287-212) est le vrai créateur de la géométrie de la mesure. On lui doit la détermination de la longueur de la circonférence, de l'aire

des trois corps ronds, de la parabole, de l'ellipse et de la spirale qui porte son nom, celle du volume du paraboloïde de révolution et de l'hyperboloïde de révolution à une nappe (appelés par lui *conoïdes*), puis de l'ellipsoïde de révolution (ou sphéroïde), enfin la découverte du centre de gravité du paraboloïde de révolution, ainsi que du procédé pour mener la tangente à la spirale.

Pappus (vers 300 de l'ère chrétienne) a trouvé le premier des théorèmes dits de Guldin, savoir, que le volume engendré par une aire plane tournant autour d'un axe situé dans son plan est égal à l'aire multipliée par la circonférence décrite par son centre de gravité, et a déterminé l'aire d'une spirale sphérique analogue à la spirale plane d'Archimède.

Au fond, dans la recherche de l'aire de la parabole et du volume de la pyramide, les anciens ont ramené la solution de la question à la sommation de la progression indéfinie $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} +$ etc. (méthode d'exhaustion); dans la plupart des autres quadratures, les grandeurs cherchées sont enfermées entre deux grandeurs variables différant aussi peu qu'on le veut et formées de parties indéfiniment décroissantes, de sorte que leur procédé ne diffère pas essentiellement de celui des modernes; il en est de même de celui qu'Archimède emploie pour trouver la tangente à la spirale. Mais *la forme* de leur démonstration est complètement différente. Nulle part, ils ne supposent que le nombre des termes d'une progression ou des parties d'une surface ou d'un volume croisse indéfiniment ou que ces parties deviennent aussi petites qu'on le veut. Ils évitent tout passage explicite à la limite; ils répètent, dans chaque cas particulier, les raisonnements par réduction à l'absurde au moyen desquels on peut établir les principes généraux ou spéciaux de la méthode des limites. Les propositions générales auxquelles ils recourent explicitement sont les suivantes : « La différence de deux quantités inégales peut s'ajouter plusieurs fois à elle-même de manière à surpasser une quantité finie proposée de la même espèce. » — « Si, d'une grandeur, on retranche plus de la moitié, puis que l'on retranche du reste encore plus de la moitié et ainsi de suite, on obtiendra, après un nombre fini d'opérations, un reste plus petit qu'une quantité donnée. »

II. Parmi les précurseurs de Newton et de Leibniz, dans les temps modernes, il faut citer surtout Neper, Kepler, Cavalieri, Grégoire de Saint-Vincent, Descartes, Fermat, Roberval, Sluse, Pascal, Wallis et Huygens.

Neper (1550-1617) est l'inventeur des logarithmes (1614), c'est-à-dire

de la première fonction transcendante nouvelle que l'on ait étudiée dans les temps modernes. « La nature et la formation des logarithmes a été proposée par leur inventeur, dit Maclaurin, d'une manière semblable à celle dont on se sert dans la méthode des fluxions pour expliquer la formation des quantités de toutes les espèces et il l'a exprimée presque dans les mêmes termes. »

Kepler (1571-1630) en 1615, dans la *Nova stereometria doliorum*, Cavalieri (1598-1647) en 1635, dans la *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Grégoire de Saint Vincent (1584-1667), avant Cavalieri, dans des manuscrits assez répandus (1621), mais surtout dans son *Opus geometricum* (1647), firent faire des progrès à la géométrie de la mesure, en trouvant de nouvelles quadratures, le premier, par la méthode peu sûre des *indivisibles*, qu'il introduisit dans la science avec la notion vague de l'infini, considéré comme un nombre; le second, par la même méthode employée plus systématiquement encore; le troisième, par la méthode rigoureuse des anciens. C'est ce dernier qui a introduit dans la géométrie les polygones à échelons, intérieurs ou extérieurs à une courbe, qui remplacent les polygones inscrits et circonscrits d'Archimède. On lui doit aussi l'étude de l'aire de l'hyperbole (qui conduisit, peu après lui, divers géomètres à la quadrature de cette courbe par les logarithmes et par les séries équivalentes), ainsi que la considération de diverses suites infinies.

Descartes (1596-1650) a imaginé (en même temps que Fermat) la représentation des courbes par une équation entre ses coordonnées (géométrie analytique) et il a rendu ainsi possible le développement moderne des mathématiques et, en particulier, de l'analyse infinitésimale. On lui doit maintes quadratures ingénieuses, mais il faut citer surtout ici, parmi ses découvertes, la méthode des coefficients indéterminés, sa méthode des tangentes (fondée sur la recherche de la normale commune à une courbe et à un cercle coupant cette courbe en deux points qui se rapprochent indéfiniment), et la construction de la normale aux roulettes.

Roberval (1602-1675) a indiqué comment on peut donner un sens raisonnable aux indivisibles et il les a maniés avec habileté, mais il est surtout connu dans la science par sa méthode des tangentes, généralisation de celle d'Archimède pour la spirale; elle est fondée sur la considération des vitesses simultanées dont on peut supposer un point animé, lorsqu'il parcourt une courbe.

Pascal (1623-1662) n'a pas trouvé de méthode générale comme Descartes et Roberval, mais il a étudié à fond la cycloïde, la spirale et les figures qui dépendent de ces courbes; il a effectué un grand nombre de quadratures par la méthode des indivisibles en disant avec exactitude ce qu'il faut y ajouter pour qu'elle soit rigoureuse.

Sluse (1622-1685), contrairement à Pascal, employait l'analyse de Viète et de Descartes; on lui doit, outre la méthode des lieux géométriques pour résoudre par l'algèbre les problèmes déterminés, des quadratures vraiment compliquées; mais sa découverte principale est celle de la règle pour mener la tangente aux courbes algébriques dont l'équation est mise sous forme rationnelle. Cette règle générale, trouvée vers 1652, mais publiée partiellement en 1668, complètement en 1673 revient à la formule $S_t f'_x(x, y) + y f'_y(x, y) = 0$, qui détermine la sous-tangente S_t, quand la courbe a pour équation $f(x, y) = 0$.

Fermat (1601-1665), antérieur à Sluse et à Pascal, et même à Roberval, mais dont les écrits n'ont eu qu'une publicité restreinte de son vivant, est, plus qu'aucun des géomètres précédents, le précurseur de Leibniz et de Newton, parce qu'il a traité, à la fois, le problème des tangentes et celui des quadratures, d'une manière approfondie et générale, quoique à propos d'exemples particuliers. Il est d'ailleurs le créateur de l'arithmétique supérieure et le co-inventeur de la géométrie analytique. Sa méthode des tangentes et des maxima et minima est, au fond, équivalente à celle du calcul différentiel; ses procédés de quadrature, dont l'un des plus ingénieux revient à l'intégration par parties, lui permettent d'effectuer presque toutes les sommations qui dépendent des fonctions élémentaires. Les radicaux ne l'embarrassent pas, parce qu'il a trouvé une méthode d'élimination et des substitutions ingénieuses pour les faire disparaître. Fermat a aussi donné le moyen de ramener la rectification des courbes à des quadratures, ce qui n'avait été fait, avant lui, que pour des courbes particulières.

Wallis (1616-1703), antérieur aussi à Sluse et à Pascal, a publié en 1655, son *Arithmetica infinitorum*, ouvrage où il a exposé, sous forme algébrique, les résultats obtenus sur les quadratures et les séries par Cavalieri, Grégoire de Saint Vincent et d'autres géomètres, et les a étendus considérablement par des inductions ingénieuses. Malgré le peu de rigueur des procédés employés par Wallis (il a reconnu, plus tard, le défaut de son exposition pour trouver la somme des suites des puissances

quelconques des nombres entiers, suites qui l'ont conduit à sa célèbre expression de π), ce Traité, dit Maclaurin, contribua beaucoup aux grands progrès que l'on fit peu après.

Huygens (1629-1695) a trouvé l'aire des conoïdes d'Archimède et effectué d'autres quadratures difficiles, et il a développé une théorie des maxima et des minima, esquissée par Descartes et un peu différente de celle de Fermat; mais il faut ici surtout le citer comme auteur de la théorie des rayons de courbure et des développées, exposée à propos de la théorie du pendule, dans son *Horologium oscillatorium* (1673), avec une entière rigueur. C'est Huygens qui a été le guide de Leibniz en mathématiques, en lui faisant étudier l'analyse dans Descartes et Sluse, les quadratures dans Grégoire de Saint Vincent et Pascal. D'autre part, au point de vue de la mécanique rationnelle, son *Horologium* a eu une influence considérable sur Newton.

Remarque. Grégoire de Saint Vincent et Sluse sont belges; Huygens, hollandais; Neper, Maclaurin, écossais; Wallis, Newton, Cayley, Sylvester, anglais; Kepler, Leibniz, Gauss, Jacobi, Riemann, Clebsch, Weierstrass, Kronecker, allemands; Descartes, Fermat, Roberval, Pascal, Legendre, Cauchy, Hermite, français; les Bernoulli et Euler, suisses; Cavalieri, Lagrange, Brioschi, italiens.

CHAPITRE II. Premiers principes du Calcul différentiel, par Leibniz et Newton (1684; 1687)[1].

3. Nouvelle méthode de recherche des Maxima et des Minima et aussi des tangentes, applicable même dans le cas d'expressions fractionnaires et irrationnelles, et calcul remarquable y relatif, par G. G. L.[2]. I. *Définition de la différentielle.* Soient l'axe AX et diverses courbes, telles que VV, WW, YY, ZZ dont les ordonnées, normales à l'axe, sont VX, WX, YX, ZX,

(1) Traduction publiée d'abord dans *Mathesis*, t. IV, pp. 177-188, le 30 septembre 1884, à l'occasion du deuxième centenaire de l'invention du calcul différentiel.

(2) Publié, en latin, le 1er octobre 1684, dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig, pp. 467-473 (*Œuvres mathématiques* de Leibniz, publiées par Gerhardt, t. V, pp. 220-226). G. G. L. est, en abrégé, pour Guillaume Godefroid Leibniz. Les nos I à X et les titres des alinéas sont ajoutés par nous. Nous renversons aussi la figure primitive, où les x positifs sont à gauche de l'origine.

et sont désignées par les lettres v, w, y, z; AX lui-même, abscisse comptée sur l'axe, est appelé x. Les tangentes sont VB(3), WC, YD, ZE rencontrant l'axe respectivement en B, C, D, E. Appelons dx une droite quelconque prise arbitrairement et dv (dw, dy, ou dz) c'est-à-dire, différentielle de v (w, y ou z), une droite qui soit à dx, comme v (w, y ou z) est à XB (XC, XD ou XE) (4). Cela posé, voici quelles sont les règles du nouveau calcul.

II. *Différentiation d'une somme, d'un produit, d'un quotient.* Si a est une constante, $da = 0$ et $d(ax) = adx$. Si $y = v$, ou si l'ordonnée d'une courbe YY est toujours égale à l'ordonnée d'une courbe correspondante VV, $dy = dv$. *Addition* et *soustraction* : Si $z - y + w + x = v$, on a $d(z - y + w + x)$ ou $dv = dz - dy + dw + dx$. *Multiplication* : $d(xv) = xdv + vdx$ ou, si $y = xv$, $dy = xdv + vdx$, car il est indifférent d'écrire xv ou, en abrégé, y. Il faut remarquer que x et dx se traitent dans ce calcul, comme y et dy ou toute autre variable et sa différentielle. On doit remarquer aussi que l'on ne peut pas toujours revenir à l'équation primitive en partant de l'équation différentielle, sauf avec quelque précaution, comme nous le dirons ailleurs. Enfin *Division* : $d\frac{v}{y}$ ou si $\left(z = \frac{v}{y}\right)$, $dz = \frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$ (5).

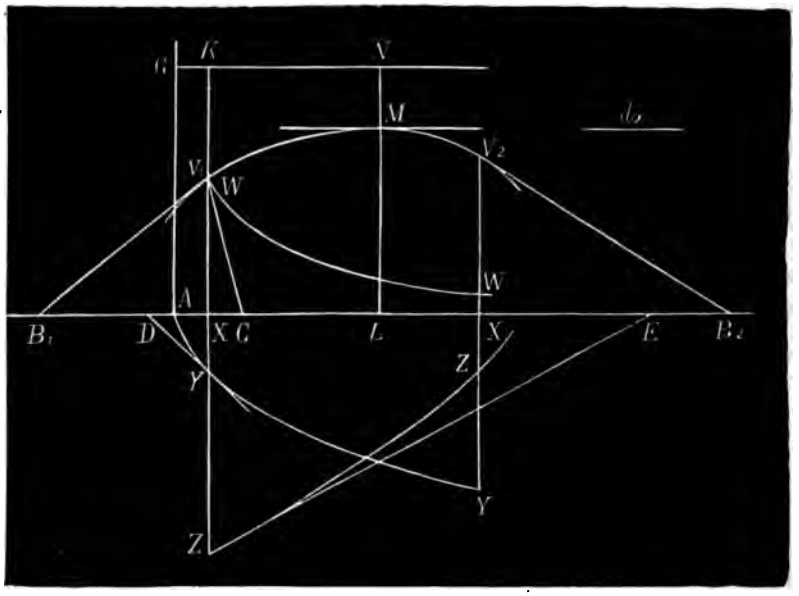
III. *Interprétation géométrique du signe de la différentielle; maxima et minima.* Quant aux signes, il faut bien noter ceci : Lorsque dans le calcul, on introduit la différentielle d'une quantité, à la place de celle-ci, on doit lui conserver le même signe; ainsi, à la place de $+z$ on écrit $+dz$, à la place de $-z$, on écrit $-dz$, comme il résulte des règles données pour l'addition et la soustraction. Mais quand on en vient à la discussion des valeurs des quantités considérées, c'est-à-dire quand on considère la relation de z avec x, on voit si la valeur de dz est positive ou négative. Quand cette dernière circonstance se présente, la tangente ZE est dirigée du point Z, non vers A, mais dans le sens contraire au delà de X, et les

(3) C'est-à-dire V_1B_1 en V_1, V_2B_2 en V_2. Plus bas, XB pour XB_1 ou XB_2.

(4) Comme on le voit, dès le début du nouveau calcul, Leibniz définit la différentielle comme Cauchy. Pour lui, $dv = v'dx$, car le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente, chacune de ces lignes étant prise avec son signe, est égal à la dérivée.

(5) Une discussion attentive aurait prouvé à Leibniz qu'il est inutile de mettre les signes supérieurs, si l'ordonnée et la tangente sont prises chacune avec leur signe. Leibniz prend ces quantités en valeur absolue. Voir la note suivante.

ordonnées décroissent lorsque les abscisses croissent. Pour les ordonnées v, comme elles sont tantôt croissantes, tantôt décroissantes, dv sera tantôt positif, tantôt négatif; dans le premier cas, la tangente V_1B_1 est dirigée vers A, dans le second, en sens contraire. Ni l'un ni l'autre de ces cas ne se présente en un point intermédiaire M, au moment où les v



ne croissent ni ne décroissent, mais sont stationnaires. Alors $dv = 0$, 0 n'étant ni positif, ni négatif, puisque $+0 = -0$. En ce point, v, c'est-à-dire l'ordonnée LM, est *Maxima* (ou si la convexité de la courbe est tournée vers l'axe, *Minima*) : la tangente à la courbe en M n'est dirigée ni vers A en se rapprochant de l'axe, ni en sens inverse vers X, mais est parallèle à l'axe. Si dv est infini par rapport à dx, alors la tangente est perpendiculaire à l'axe et se confond avec l'ordonnée. Si dv et dx sont égaux, la tangente fait avec l'axe un angle égal à la moitié d'un angle droit.

Points d'inflexion. Si les ordonnées croissent et que leurs accroissements ou différentielles dv croissent aussi (ou si les dv étant supposés positifs, il en est de même des différentielles des différentielles ddv, et de même, si les dv et les ddv sont négatifs à la fois), la courbe tourne sa *convexité* vers l'axe; sinon, c'est sa *concavité* qui est tournée vers

l'axe. Mais au point où l'accroissement est maximum ou minimum, c'est-à-dire où les accroissements, de décroissants, deviennent croissants ou inversement, il y a *un point d'inflexion* et la convexité et la concavité se permutent entre elles, pourvu, bien entendu, qu'en ce point les ordonnées, de croissantes, ne deviennent pas décroissantes ou inversement, parce qu'alors la concavité ou la convexité subsisterait. Il est d'ailleurs impossible que les accroissements continuent à croître ou à décroître et que les ordonnées fassent l'inverse. Il y a donc un point d'inflexion quand v et dv étant différents de zéro, on a $ddv = 0$. Le problème de l'inflexion correspond donc au cas où une certaine équation a trois racines égales, et non deux seulement comme dans les questions relatives aux maxima et aux minima. Tout cela dépend, comme on voit, de l'usage légitime des signes.

IV. *Remarque sur la différentielle des quotients.* Quelquefois il faut employer des *signes ambigus*(6), comme on l'a vu plus haut, pour la division; on doit procéder ainsi jusqu'à ce que l'on sache celui qu'il faut employer. Quand x croît, si $\frac{v}{y}$ croît (ou décroît), il faut prendre les signes dans $d\frac{v}{y}$ ou $\frac{\pm vdv \mp ydv}{yy}$ de manière que cette fraction soit positive (ou négative), $\mp$ étant le signe contraire de $\pm$, c'est-à-dire que si l'un est $+$, l'autre est $-$, et inversement. Plusieurs ambiguïtés de signe peuvent se présenter dans le même calcul et je les distingue par des parenthèses. Ainsi, si $w = \frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{v}$,

$$dw = \frac{\pm vdy \mp ydv}{yy} + \frac{(\pm)\, ydz\, (\mp)\, zdy}{zz} + \frac{((\pm))\, xdv\, ((\mp))\, vdx}{vvw}.$$

Sans cela, les ambiguïtés d'origine diverse se confondraient. Notez ici qu'un signe ambigu multiplié par lui-même donne $+$, par le contraire donne $-$, par un autre signe ambigu, une nouvelle ambiguïté dépendant des deux premières.

---

(6) Comme nous l'avons dit plus haut, cet alinéa est inutile : on doit toujours prendre les signes supérieurs. Newton l'a bien reconnu et n'a laissé aucune ambiguïté de signe dans ses formules. Dans la célèbre lettre qu'il a adressée le 24 octobe 1676 à Oldenbourg, pour Leibniz, il fait l'observation suivante : « Leibniz ne semble pas avoir remarqué que je représente habituellement par des lettres des quantités affectées du signe *plus* ou du signe *moins*. De cette manière, je ne multiplie pas inutilement le nombre des théorèmes » (*Œuvres math. de Leibniz*, t. I, p. 138 ou *Newtoni Opuscula*, t. I, p. 346-347, de l'édition de Castillon, Genève, 1744).

V. *Puissances et racines. Puissances* : $d(x^a) = ax^{a-1}dx$, par exemple, $d(x^3) = 3x^2dx$; $d\frac{1}{x^a} = -\frac{adx}{x^{a+1}}$, par exemple, si $v = \frac{1}{x^3}$, $dv = -\frac{3dx}{x^4}$. *Racines* : $d\sqrt[b]{x^a} = dx\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}$ (ainsi, $d\sqrt[2]{y} = \frac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$, car, dans ce cas, $a = 1$, $b = 2$; ainsi $\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}$ est $\frac{1}{2}\sqrt[2]{y^{-1}}$ et y^{-1} est, d'après la nature des exposants négatifs, la même chose que $\frac{1}{y}$ et $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ est $\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$); $d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = \frac{-adx}{b\sqrt[b]{x^{b+a}}}$. La règle donnée pour les puissances entières aurait suffi pour les puissances en dénominateur et pour les racines, puisque si l'exposant est négatif, la puissance vient en dénominateur et s'il est fractionnaire, la puissance se change en racine. Mais j'ai préféré tirer moi-même ces conséquences que de les laisser à déduire aux autres, parce qu'elles sont très générales et d'un usage fréquent, et en matière compliquée, il faut songer à faciliter la tâche du calculateur.

VI. *Le nouveau calcul comparé aux méthodes anciennes.* Grâce à l'*Algorithme*, si j'ose ainsi dire, de ce calcul que j'appelle *différentiel*, toutes les équations entre différentielles peuvent être trouvées par le calcul ordinaire; on peut obtenir les maxima et les minima, et de même les tangentes, sans qu'il soit nécessaire de faire disparaître les dénominateurs et les radicaux ou autres formes d'expressions embarrassantes, comme c'est le cas pour les méthodes publiées jusqu'à présent(7). La démonstration de tout ce qui précède est facile pour celui qui est versé en ces questions, en s'appuyant sur une seule remarque à laquelle on n'a pas fait assez attention, savoir que l'on peut regarder dx, dy, dv, dw, dz comme proportionnels respectivement aux accroissements ou décroissemeuts instantanés de x, y, v, w, z(8).

Il résulte de là que l'on peut écrire immédiatement l'équation différentielle correspondant à une équation donnée, en remplaçant chaque *terme*

(7) Allusion aux méthodes de Fermat, de Barrow et surtout de Sluse.

(8) L'accroissement instantané d'une variable y est l'accroissement que prendrait cette variable, pendant un temps quelconque, si sa loi de génération restait, pendant ce temps, ce qu'elle est au début. C'est au fond, la définition du n° I, sous la forme $dy = \Delta x \lim(\Delta y : \Delta x)$.

(chaque partie qui concourt à former l'équation par addition et soustraction) par sa différentielle, chaque quantité qui entre dans chacun des termes par sa différentielle, non purement et simplement, mais d'après l'Algorithme exposé plus haut, Les méthodes antérieures n'ont pas de règle analogue, mais emploient la plupart une droite telle que DX ou quelque autre analogue, mais non la droite *dy*, quatrième proportionnelle à DX, XY et *dx*, et cela trouble tout. De là vient aussi que ces méthodes prescrivent de faire disparaître les dénominateurs et les radicaux (qui se présentent avec un signe + ou un signe —). Il est clair aussi que notre méthode s'étend aux lignes transcendantes, qui ne peuvent être traitées par le calcul algébrique ou ne sont d'aucun degré déterminé; et cela de la manière la plus générale, sans aucune supposition particulière non toujours réalisée. Il suffit que l'on admette d'une manière générale que trouver la *tangente* à une courbe, c'est mener la droite joignant deux points infiniment voisins de la courbe, ou prolonger le côté du polygone d'un nombre infini de sommets qui équivaut pour nous à la *courbe*(9). Mais cette distance infiniment petite peut toujours s'exprimer par une différentielle connue, comme *dv*, ou par une relation avec *dv*, c'est-à-dire, par une autre tangente connue. En particulier, si *y* est une quantité transcendante, par exemple, l'ordonnée de la cycloïde, et qu'elle entre dans un calcul par lequel est déterminée l'ordonnée *z* d'une autre courbe, et qu'il s'agisse de trouver *dz*, ou au moyen de *dz*, la tangente à cette courbe, certainement il faudra expri-

---

(9) Leibniz n'entend pas ceci dans un sens vague, mais dans le sens précis de la méthode actuelle des limites, comme l'a remarqué Lacroix qui cite le passage suivant des *Acta eruditorum* de 1684, p. 585 (*Œuv. math*, t. V., p. 16) : « Une courbe doit être regardée comme un polygone d'une infinité de côtés. Toutes les propriétés d'un polygone pareil qui ne dépendent pas du nombre de ses côtés ou qui sont telles qu'elles se vérifient d'autant mieux que le nombre des côtés est plus grand, *de manière que l'erreur devienne aussi petite que l'on veut*, appartiennent [par définition] à la courbe. » Dans une lettre à Wallis du 28 mai 1697 (*Commercium Epistolicum*, édition Lefort, p. 220), après avoir distingué nettement la méthode de quadrature par les séries (méthode d'exhaustion, employée par Archimède pour la parabole, par Eudoxe pour la pyramide), de la méthode par sommation d'infiniment petits (employée aussi au fond par Archimède), Leibniz fait la remarque suivante : « *Commune omnibus sit principium demonstrandi : ut error ostendatur infinite parvus, seu minor quamvis dato, Euclidis jam exemplo.* »

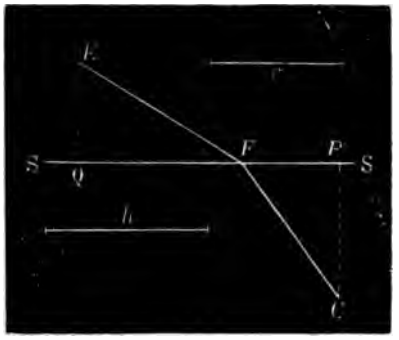
mer dz au moyen de dy; quant à dy, on l'obtiendrait parce que l'on connaît la tangente à la cycloïde. De même, on pourrait trouver la tangente à la cycloïde, si on la suppose inconnue, d'après la propriété des tangentes au cercle.

VII. *Exemple.* Il convient de donner ici un exemple. Nous y désignerons un quotient par $x : y$ au lieu d'écrire x divisé par y ou $\frac{x}{y}$(10). Soit une *première* équation donnée $x : y + (a + bx)(c - ex) :$ carré de $(ex + fxx) + ax\sqrt{gg + yy} + yy : \sqrt{hh + lx + mxx} = 0$, exprimant une relation entre x et y ou entre AX et XY, $a, b, c, e, f, g, h, l, m$ étant des données. On demande de mener par Y la tangente YD, ou l'on cherche le rapport de DX à la droite donnée XY. Pour abréger, posons $a + bx = n$, $c - ex = p$, $ex + fxx = q$, $gg + yy = r$, $hh + lx + mxx = s$. On aura la *deuxième* équation $x : y + np : qq + ax\sqrt{r} + yy : \sqrt{s}$. D'après les règles de notre calcul, $d(x : y) = (\pm xdy \mp ydx) : yy$; de même $d(np : qq) = [(\pm 2npdq (\mp) q (ndp + pdn)] : q^3$; $d(ax\sqrt{r}) = ax\,dr : 2\sqrt{r} + adx\sqrt{r}$; $d(yy : \sqrt{s}) = [(\pm) yyds (\mp) 4ys\,dy) : 2s\sqrt{s}]$. Ces diverses différentielles, depuis $d(x : y)$ jusque $d(yy : \sqrt{s})$ ajoutées entre elles ont une somme nulle et donneront ainsi la *troisième* équation, qui est donc obtenue en remplaçant chaque terme de la seconde par sa différentielle. Maintenant $dn = bdx$, $dp = -2x\,dx$, $dq = edx + 2fx\,dx$, $dr = 2y\,dy$, $ds = ldx + 2mx\,dx$. Substituant ces valeurs dans la troisième équation, on en obtient une *quatrième* où les seules différentielles qui restent sont dx, dy, lesquelles ne sont ni au dénominateur ni sous des radicaux. Chaque terme contient en facteur dx ou dy, et quelque compliqué que soit le calcul, il en est toujours ainsi, de sorte que la dernière équation est homogène par rapport à ces deux quantités. On peut donc toujours avoir la valeur de $dx : dy$ ou du rapport de ces quantités, c'est-à-dire celui de DX à XY. Dans le cas particulier traité, on trouve, en changeant la quatrième équation en une proportion que dx est à dy comme $\pm x : yy + axy : \sqrt{r}((\pm))\,2y : \sqrt{s}$ est à $\pm 1 : y(\pm)2np(e + 2fx) : q^3(\mp)(-2nx + pb) : q^2 - a\sqrt{r}((\pm))\,yy(l + 2mx) : 2s\sqrt{s}$. Mais le point Y étant donné, x, y sont connus et, par suite, aussi n, p, q, r, s. On a donc ce que l'on cherche. Nous avons traité ici cet exemple assez compliqué afin de montrer comment on doit se servir des règles exposées

(10) Nous conservons les notations de Leibniz.

plus haut, même dans un calcul plus difficile. Maintenant, il convient d'en faire connaître l'usage dans des cas plus simples.

VIII. *Loi de la réfraction.* Soient donnés deux points C et E et la droite SS dans un même plan. On demande de déterminer le point F



sur SS de manière que la somme des rectangles faits sur CF et sur la longueur donnée h, puis sur FE et l'autre longueur donnée r soit la plus petite possible. Si SS est une ligne qui sépare deux milieux, que h soit la densité du milieu qui est du côté de C, par exemple de l'eau, r celle du milieu qui est du côté de E, par exemple de l'air, on cherche le point F tel que le chemin de E à C par F soit le plus facile possible. Représentons toutes ces sommes de rectangles possibles, ou les difficultés de tous les chemins possibles, par les ordonnées KV de la courbe VV, perpendiculaires à GP; appelons ces ordonnées ω et cherchons celle qui est la plus petite NM (Fig. 1). Puisque les points C et E sont donnés, les perpendiculaires CP $= c$, EQ $= e$ à SS sont connues et aussi PQ $= p$. Quant à QF, qui est égale à GK ou AX, nous l'appelons x, puis nous faisons CF $= f$, EF $= g$. Alors FP $= p - x$, $f = \sqrt{cc + pp - 2px + xx}$ ou en abrégé $\sqrt{l}$, et $g = \sqrt{ee + xx}$ ou en abrégé $\sqrt{m}$. Nous avons donc $\omega = h\sqrt{l} + r\sqrt{m}$. On déduit de là (puisque $d\omega = 0$ dans le cas du minimum) l'équation différentielle $0 = hdl : 2\sqrt{l} + rdm : 2\sqrt{m}$, d'après les règles de notre calcul. Or $dl = -2\,dx\,(p - x)$, $dm = 2x\,dx$. Donc il vient $h(p - x) : f = rx : g$. Appliquons ceci à la dioptrique et posons $f = g$, c'est-à-dire CF = FE, ce qui est permis puisque la loi de la réfraction reste la même au point F, quelle que soit la longueur de CF. On aura $h(p - x) = rx$ ou $h : r :: x : p - x$, ou $h : r ::$ QF : FP, c'est-à-dire que les sinus des angles d'incidence QF et FP sont en raison inverse de r et h, densités des milieux d'incidence et de réfraction. Il faut comprendre la densité, non par rapport à nous, mais par rapport à la résistance qu'offre les milieux aux rayons lumineux. On a ainsi la démonstration du calcul donné par nous ailleurs dans les *Acta eruditorum*, quand nous exposions le fondement général de l'optique, de la catoptrique et de la dioptrique. Des auteurs très savants ont cherché d'une manière

très indirecte ce qu'une personne versée dans le calcul différentiel peut obtenir en trois lignes.

IX. *Construction de la tangente à une certaine courbe.* Je montrerai la même chose sur un autre exemple. Soit 133 une courbe telle que la somme des six droites 34, 35, 36, 37, 38, 39 menées d'un point quelconque 3 de la courbe ait une somme donnée g. Soit T14526789 l'axe, 12 l'abscisse, 23 l'ordonnée. On demande la tangente 3T. Je dis

que l'on aura T2 est à 23, comme $\frac{23}{34}+\frac{23}{35}+\frac{23}{36}+\frac{23}{37}+\frac{23}{38}+\frac{23}{39}$ est à $-\frac{24}{34}-\frac{25}{35}+\frac{26}{36}+\frac{27}{37}+\frac{28}{38}+\frac{29}{39}$.

Une règle analogue subsiste si l'on suppose dix ou plus de points fixes au lieu de six. Dans les méthodes pour trouver les tangentes publiées jusqu'à présent, il serait extrêmement ennuyeux et peut-être impossible de faire entrer dans les calculs des points de ce genre, si l'on doit faire disparaître les irrationnelles en égalant à une variable nouvelle tous les produits des binômes ou trinômes relatifs à ces droites. Dans notre méthode, pour tous ces cas et d'autres plus compliqués, la facilité est toujours la même, plus grande qu'on ne peut l'imaginer et vraiment remarquable.

X. *Conclusion. Problème de De Beaune.* Tels sont les commencements seulement d'une certaine *Géométrie beaucoup plus sublime*, présentant des problèmes très difficiles et très beaux, même relatifs à la mathématique mixte, problèmes que personne n'essaiera sans témérité de traiter avec la même facilité qu'avec notre calcul ou un calcul semblable. Comme appendice, donnons ici la solution d'un problème proposé par de Beaune et que Descartes a essayé de résoudre sans y réussir (Tome 3 de ses lettres) : Trouver une ligne WW telle que la tangente étant WC, XC soit toujours égal à une constante. On a le rapport XW : XC ou $v : a$ égal à $dv : dx$. Donc si dx (qui est arbitraire) est supposée constante, par exemple égale à b, ou si $x = \mathrm{AX}$ croît d'une manière uniforme, on aura $v = \frac{a}{b}dv$. Les ordonnées v de la courbe sont donc proportionnelles à leurs différentielles ou accroissements dv, c'est-à-dire

que si les x sont en progression arithmétique, les w sont en progression géométrique, ou si les w sont les nombres, les x seront les logarithmes. La ligne WW est donc une logarithmique(11).

4. Principes du calcul des fluxions par I. Newton(12). LEMME. *Le moment d'une quantité engendrée est égal à la somme des produits des moments de chacun des côtés générateurs par les coefficients et les exposants de ces côtés*(13).

J'appelle quantité engendrée toute quantité qui est obtenue, sans addition ni soustraction, au moyen de côtés ou termes quelconques, en arithmétique, par multiplication, division et extraction de racines; en géométrie, par la recherche du contenu des figures ou de leurs côtés, des quatrièmes ou des moyennes proportionnelles. A cette catégorie de quantités appartiennent les produits, les quotients, les racines, les rectangles, les carrés, les cubes, les côtés élevés au carré, au cube, et autres expressions analogues. Je considère ici ces quantités comme indéterminées et variables, comme croissant ou décroissant par un mouvement ou flux perpétuel; leurs accroissements ou décroissements instantanés(14) sont ce que j'appelle leurs moments. Les accroissements sont les moments positifs, les décroissements sont les moments négatifs. Il ne faut pas entendre par là des quantités finies. Les quantités finies [déterminées] ne sont pas des moments, mais les quantités engendrées par les moments(15).

---

(11) Au fond, Leibniz détermine ici une fonction par une équation différentielle, sans faire d'intégration proprement dite. La différentiation explicite de la fonction exponentielle a été faite en 1697 par Jean Bernoulli.

(12) Traduction du second lemme du livre deuxième des *Principes* (1687), faite sur la seconde édition qui ne diffère pas essentiellement de la première.

(13) Moment = différentielle; quantité engendrée = quantité de la forme $A^mB^nC^p$; A, B, C sont les côtés générateurs; A a pour exposant m, pour coefficient $A^{m-1}B^nC^p$; le produit de dA par m et $A^{m-1}B^nC^p$ est l'une des parties du moment de $A^mB^nC^p$; de même, les deux autres parties sont $n \times A^mB^{n-1}C^p \times dB$ et $p \times A^mB^nC^{p-1} \times dC$. Le sens du théorème est donc $d(A^mB^nC^p) = mA^{m-1}B^nC^p dA + nA^mB^{n-1}C^p dB + pA^mB^nC^{p-1}dC$.

(14) Voir note 8.

(15) Dans la première édition, au lieu de ces mots : *Particulae finitae non sunt momenta sed quantitates ipsae ex momentis genitae*, on trouve les suivants : *Momenta, quam primum finitae sunt magnitudinis desinunt esse momenta. Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento*, plus obscurs encore. Il faut tout entendre d'après la remarque qui termine la note suivante. Nous croyons que Newton est obscur à dessein (Voir la note 18).

Ceux-ci sont les principes naissants des quantités finies; car, dans ce lemme, il ne s'agit pas de la grandeur des moments, mais de leurs rapports à l'instant où ils naissent. On peut aussi, à la place des moments, prendre les vitesses des accroissements ou des décroissements (quantités que l'on peut appeler mouvements, variations ou fluxions des quantités)(16), ou des quantités quelconques, proportionnelles à ces vitesses. Quant au coefficient d'un côté générateur quelconque, c'est la quantité qui, multipliée par ce côté, produit la quantité engendrée.

Le sens du lemme est donc le suivant : Si a, b, c, etc., sont les moments des quantités croissantes ou décroissantes A, B, C, etc., ou les vitesses(17) avec lesquelles elles varient, le moment ou la variation du rectangle AB sera $a\mathrm{B} + b\mathrm{A}$; celui du volume ABC sera $a\mathrm{BC} + b\mathrm{AC} + c\mathrm{AB}$; les moments des puissances

$$\mathrm{A}^2,\ \mathrm{A}^3,\ \mathrm{A}^4,\ \mathrm{A}^{\frac{1}{2}},\ \mathrm{A}^{\frac{3}{2}},\ \mathrm{A}^{\frac{1}{3}},\ \mathrm{A}^{\frac{2}{3}},\ \mathrm{A}^{-1},\ \mathrm{A}^{-2},\ \mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}$$

seront respectivement

$$2a\mathrm{A},\ 3a\mathrm{A}^2,\ 4a\mathrm{A}^3,\ \tfrac{1}{2}a\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}},\ \tfrac{3}{2}a\mathrm{A}^{\frac{1}{2}},\ \tfrac{1}{3}a\mathrm{A}^{-\frac{2}{3}},\ \tfrac{2}{3}a\mathrm{A}^{-\frac{1}{3}},\ -a\mathrm{A}^{-2},\ -2a\mathrm{A}^{-3},\ -\tfrac{1}{2}a\mathrm{A}^{-\frac{3}{2}}.$$

En général, le moment d'une puissance quelconque $\mathrm{A}^{\frac{n}{m}}$ sera $\frac{n}{m}a\mathrm{A}^{\frac{n-m}{m}}$. Celui de $\mathrm{A}^2\mathrm{B}$ sera $2a\mathrm{AB} + b\mathrm{A}^2$; celui de $\mathrm{A}^3\mathrm{B}^4\mathrm{C}^2$, $3a\mathrm{A}^2\mathrm{B}^4\mathrm{C}^2 + 4b\mathrm{A}^3\mathrm{B}^3\mathrm{C}^2 + 2c\mathrm{A}^3\mathrm{B}^4\mathrm{C}$; celui de $\dfrac{\mathrm{A}^3}{\mathrm{B}^2}$ ou $\mathrm{A}^3\mathrm{B}^{-2}$, $3a\mathrm{A}^2\mathrm{B}^{-2} - 2b\mathrm{A}^3\mathrm{B}^{-3}$, et ainsi de suite. On démontre ce lemme comme il suit.

Premier cas. Le rectangle AB variable, dans le cas où les côtés sont diminués des demi-moments $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, devient le produit de $\mathrm{A} - \frac{1}{2}a$

---

(16) Aujourd'hui les *dérivées*. Newton, dans le *Scholium* qui termine la première section du livre premier des *Principes*, dit qu'il faut entendre, dans le sens de la théorie des limites, tout ce qu'il expose ultérieurement en parlant de quantités naissantes, d'infiniment petits, etc. Voici ses propres paroles : « Igitur in sequentibus, si quando facili rerum conceptui consulens, dixero quantitas quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite. » (Éd. d'Amsterdam, 1714, p. 34).

(17) Ailleurs, Newton désigne la vitesse d'accroissement d'une quantité A, par la lettre A surmontée d'un point. Leibniz a toujours maintenu, avec raison, que sa notation des différentielles vaut mieux que celle de Newton par les fluxions. Newton, dit-il : « se sert d'autres caractères; mais comme la caractéristique même [la notation] est, pour ainsi dire, une grande partie de l'art d'inventer, je crois que les nôtres donnent plus d'ouverture. (*Euv. Math.*, t. V., p. 307; Dutens, t. III, p. 301). »

par $B - \frac{1}{2}b$, ou $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; quand les côtés sont augmentés des demi-moments $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, il devient $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De ce dernier rectangle, soustrayez le premier et il restera $aB + bA$. Donc les accroissements totaux a et b donnent naissance à l'accroissement du rectangle $aB + bA$; ce qu'il fallait démontrer(18).

Deuxième cas. Posons $AB = G$; d'après le premier cas, le moment du volume ABC ou de GC sera $gC + cG$, c'est-à-dire (en remplaçant G par AB, g par $aB + bA$), $aBC + bAC + cAB$. Le raisonnement est le même pour un produit d'autant de facteurs que l'on veut. C. Q. F. D.

Troisième cas. Soient $A = B = C$; le moment de A^2, c'est-à-dire de AB, sera $aB + bA$ ou $2aA$; celui de A^3 ou ABC sera $aBC + bAC +$

---

(18) Newton remplace ici, sans explication suffisante, la différentielle $d(AB)$ par l'accroissement $\Delta[(A - \frac{1}{2}\Delta A)(B - \frac{1}{2}\Delta B)]$. C'est un grave défaut de son exposition. Il semble que l'illustre géomètre, sur ce point fondamental, ait toujours essayé de ne livrer sa pensée qu'à moitié, au lieu de la dévoiler toute entière. Dans son premier travail sur l'Analyse infinitésimale, écrit en 1669, mais publié seulement en 1711, savoir l'*Analysis per Aequationes numero terminorum infinitas*, une seule fois (*Opuscula*, I, p. 26, lignes 1 et 8; *Comm. epist.*, p. 73, lignes 16, 17, 23), il indique d'une manière fugitive, pourquoi il a le droit d'employer une égalité approximative $y + dy = F(x + \Delta x)$, au lieu de l'égalité rigoureuse $y + \Delta y = F(x + \Delta x)$, pour différentier $y = Fx$. Dans son *Tractatus de Quadratura Curvarum* (publié en 1704), il est assez clair dans l'Introduction, surtout dans la recherche de la dérivée de x^n (*Opusc.*, p. 206), mais dans l'ouvrage lui-même, il remplace partout les accroissements par les différentielles. Enfin, il procède de même dans son livre le plus considérable sur les nouveaux calculs, savoir la *Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam*, écrit peut-être dès 1671, mais publié seulement en 1736, en Anglais, par Colson (Voir, en particulier, p. 59-60 dans l'édition de Castillon). Le passage où il s'est exprimé le plus clairement sur son procédé, est le suivant emprunté à sa *Recensio* anonyme du *Commercium Epistolicum* où il dit en parlant de lui-même : « Cum autem Propositionem aliquam demonstrat (Newtonus), literam o adhibet profinito Momento temporis vel ejus exponentis, aut cujusvis quantitatis uniformiter fluentis; totamque calculationem absolvit per Geometriam veterum in finitis figuris sive schematibus sine ulla approximatione; et cum primum calculatio peracta est, et aequatio reducta, supponit momentum o decrescere *in infinitum* atque evanescere. Cum vero non demonstrat, sed solum investigat Propositionem, quo citius rem conficiat, supponit momentum o esse infinite parvum, et in scribendo illud negligit, omnibusque approximationum modis utitur, quos nullum in conclusione errorem parituros autumat (*Commercium epistolicum*, p. 14) » Il est regrettable qu'il ne se soit pas exprimé aussi clairement dans sa *Méthode des Fluxions*.

cAB ou $3aA^2$. Pour la même raison, le moment de la puissance A^n est naA^{n-1}. C. Q. F. D.

Quatrième cas. Puisque $\frac{1}{A}$ multiplié par A égale l'unité, le moment de $\frac{1}{A}$ multiplié par A, plus $\frac{1}{A}$ multiplié par a est égal au moment de 1 ou zéro. Donc le moment de $\frac{1}{A}$ ou A^{-1} est $\frac{-a}{A^2}$. En général, puisque $\frac{1}{A^n}$ multiplié par A^n égale l'unité, le moment de $\frac{1}{A^n}$ multiplié par A^n plus $\frac{1}{A^n}$ multiplié par naA^{n-1} est nul. Par suite, le moment de $\frac{1}{A^n}$ ou A^{-n} sera $-\frac{na}{A^{n+1}}$. C. Q. F. D.

Cinquième cas. Puisque $A^{\frac{1}{2}}$ multiplié par $A^{\frac{1}{2}}$ est égal à A, le moment de $A^{\frac{1}{2}}$ multiplié par $2A^{\frac{1}{2}}$ sera égal à a, d'après le troisième cas; donc le moment de $A^{\frac{1}{2}}$ sera $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ou $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. En général, si l'on pose $A^{\frac{m}{n}} = B$, on aura $A^m = B^n$ et, par suite, $maA^{m-1} = nbB^{n-1}$ et $maA^{-1} = nbB^{-1}$ ou $nbA^{-\frac{m}{n}}$. Donc $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}} = b$, c'est-à-dire, le moment de $A^{\frac{m}{n}}$. C. Q. F. D.

Sixième cas. Par conséquent, le moment d'une quantité A^mB^n quelconque est égal au moment de A^m multiplié par B^n plus le moment de B^n multiplié par A^m, c'est-à-dire $maA^{m-n}B^n + nbB^{m-n}A^n$ et cela que les indices m, n soient entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs. Et il en est de même dans le cas du produit de plus de deux puissances.

Corollaire 1. De là résulte que dans les proportions continues, si un terme est donné, les moments des autres seront entre eux comme les termes multipliés par le nombre des intervalles qui les séparent du terme donné. Ainsi, si A, B, C, D, E, F sont en proportion continue et si le terme C est donné, les moments des autres termes seront entre eux comme — 2A, — B, D, 2E, 3F(19).

---

(19) On peut écrire, en effet, la progression ou proportion continue CQ^{-2}, CQ^{-1}, C, CQ, CQ^2, CQ^3. Ces quantités ont pour moments $-2qCQ^{-3}$, $-qCQ^{-2}$, 0, qC, $2qC$, $3qCQ^2$ égaux, au facteur $(q : Q)$ près, à $-2CQ^{-3}$, $-CQ^{-1}$, 0, CQ, $2CQ^2$, $3CQ^3$.

Corollaire 2. Si, de quatre quantités proportionnelles, on donne deux moyens, les moments des extrêmes sont entre eux comme ces extrêmes. Il en est de même des moments des facteurs d'un produit constant (20).

Corollaire 3. Si la somme ou la différence de deux carrés est donnée, les moments des côtés seront réciproquement comme les côtés (21).

Remarque. Dans des lettres échangées il y a une dizaine d'années [1676-1677] avec le très habile géomètre G. G. Leibniz, je lui ai fait savoir que j'étais en possession d'une méthode pour déterminer les maxima et les minima, mener les tangentes et traiter les autres questions semblables, méthode qui servait aussi bien dans le cas des racines que dans celui des expressions rationnelles ; je lui cachais cette méthode dans la phrase suivante écrite en lettres transposées : *Étant donnée une équation contenant un nombre quelconque de quantités variables ou fluentes, trouver leurs fluxions et inversement.* Cet homme illustre me répondit qu'il était aussi tombé sur une méthode analogue et il me communiqua cette méthode qui s'écarte à peine de la mienne, sauf dans les termes et les notations (22). Le fondement des deux méthodes est contenu dans le lemme précédent (23).

CHAPITRE III. Indéfiniment petits. Infiniment petits et pseudo-infiniment petits.

5. Définitions. I. Un *infiniment petit* (définition de Cauchy), est une quantité variable qui a pour limite zéro ; ou encore, en évitant de se

---

(20) Au signe près : si $AB = c^{te}$, on a $aB + bA = 0$ ou $a : b = A : -B$.

(21) De $A^2 \pm B^2 =$ constante, on déduit $2aA \pm 2bB = 0$ ou $a : b = B : \mp A$.

(22) Dans la seconde édition des *Principes* (1713), Newton ajoute ici : et *idea generationis quantitatum*, c'est-à-dire que, selon lui, les deux méthodes diffèrent aussi par la manière dont on conçoit, dans l'une et l'autre, la génération des quantités. Newton regarde les variables comme engendrées d'une manière continue, dans le sens vulgaire de ce mot ; Leibniz, comme étant la somme de leurs accroissements successifs. Cauchy a prouvé l'équivalence des deux manières de voir

(23) Dans la première et la deuxième édition des *Principes*, Newton reconnaît, comme on le voit, que Leibniz a trouvé, tout comme lui, le calcul différentiel. Dans la troisième édition (1726), à cause de la triste querelle que l'on parvint à susciter entre lui et Leibniz, il a eu la faiblesse de remplacer ce *Scholium* célèbre par un autre, où il n'est plus fait mention de son illustre émule. Leibniz, à la fin, fut injuste aussi pour Newton ; mais auparavant, il avait reconnu les droits de celui-ci à l'invention du calcul différentiel.

servir du mot limite, une quantité variable qui peut DEVENIR et RESTER inférieure à une quantité donnée aussi petite qu'on le veut, tandis qu'une ou plusieurs variables dont dépend la première tendent vers des valeurs inaccessibles. La notion d'infiniment petit, ainsi définie, ne présente rien de plus mystérieux ou de plus incompréhensible que celle de limite. Le nom seul prête à l'erreur et aurait dû être remplacé par celui d'*indéfiniment petit*. Pour éviter toute ambiguïté, nous emploierons ce dernier terme dans ce chapitre. Newton se servait, dans le même sens, du mot *évanouissant*.

La vraie *méthode infinitésimale* ou *méthode des indéfiniment petits* consiste à ramener les questions de mathématiques à la recherche de limites de sommes ou de rapports d'indéfiniment petits. Cette méthode est souvent très expéditive, grâce au *principe de substitution des indéfiniment petits*, savoir : *Dans les limites de sommes arithmétiques ou de rapports d'indéfiniment petits, on peut remplacer chacun d'eux par un autre dont le rapport* r *au premier ait pour limite l'unité.* La démonstration de ce principe suppose que les rapports r aient pour limite l'unité, même si l'on fait varier simultanément toutes les variables dont r dépend.

II. On a aussi employé le nom d'*infiniment petit* (ou, s'il s'agit de grandeurs concrètes, le terme synonyme d'*indivisible*) dans le sens littéral, pour désigner une quantité qui EST (et non qui peut *devenir* et *rester*) inférieure à toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit.

Il est clair, d'après la définition précédente, qu'*il n'y pas de différence entre un infiniment petit pris à la lettre et une quantité nulle.* Le calcul infinitésimal, dans cette manière de voir, est un calcul sur des zéros, mais sur *des zéros qui gardent la trace de leur origine*, si l'on peut ainsi parler. Il existe, en effet, entre ces zéros des rapports *conventionnels* que l'on peut définir comme il suit : si α, β sont des infiniments petits (nuls), limites des quantités variables A, B, la limite r du rapport (A : B), est, par définition, ce que l'on appelle le rapport $(\alpha : \beta)$ et l'on écrit $\alpha = r\beta$. De même, on appelle somme d'un nombre infini d'infiniment petits (nuls) α_1, α_2, α_3, etc., la limite de la somme des quantités variables A_1, A_2, A_3, etc., en nombre indéfiniment croissant, dont α_1, α_2, α_3, etc., sont les limites nulles.

Le principe de la méthode des infiniment petits (nuls) est un postulat qui peut se mettre sous la forme suivante : *On peut remplacer un infiniment petit (nul) par un autre dont le rapport au premier est égal à l'unité.*

Quand on expose avec précision, comme nous venons de le faire, le sens des termes employés dans la méthode des infiniment petits (nuls), on voit qu'elle ne diffère pas, au fond, de la méthode des indéfiniment petits, pourvu que l'on restreigne le postulat aux sommes arithmétiques et aux rapports d'infiniment petits (nuls), seules expressions pour lesquelles on le démontre d'une manière générale.

III. Certains géomètres ont donné un autre sens encore au mot *infiniment petit*. D'après eux, il existe *des quantités différentes de zéro et qui sont cependant inférieures à toute grandeur assignable*. Nous désignerons les infiniment petits entendus ainsi sous le nom de *pseudo-infiniment petits*, pour les distinguer des *indéfiniment petits* et des *infiniment petits nuls* et pour rappeler, en même temps, la contradiction évidente que contient leur définition. D'après les géomètres qui ont employé ces soi-disant quantités, l'analyse infinitésimale repose sur la proposition suivante : Dans les calculs, *on peut remplacer une quantité par une autre qui en diffère d'un pseudo-infiniment petit*. Heureusement, en pratique, la plupart ont confondu les pseudo-infiniment petits, tantôt avec les indéfiniment petits, quand ils les soumettent au calcul, comme des quantités finies, tantôt avec les infiniment petits nuls, quand ils les traitent comme des quantités plus petites que toute quantité assignable.

IV. L'emploi du terme *infiniment petit* dans trois sens différents (indéfiniment petits, zéros gardant la trace de leur origine, pseudo-infiniment petits) n'a pas peu contribué à obscurcir les écrits des géomètres. Au XVII[e] et au XVIII[e] siècle, comme nous allons le montrer par quelques citations caractéristiques, Kepler, Cavalieri, Wallis, au fond, semblent employer les infiniment petits nuls, mais sous une forme vague; Euler en donne systématiquement la théorie; Jean Bernoulli, l'Hospital et Poisson, paraissent être les seuls géomètres dignes de ce nom qui croient à l'existence des pseudo-infiniment petits; Fermat, Roberval, Pascal, Newton, Leibniz se servent de la méthode des indéfiniment petits, mais emploient souvent le langage abrégé de la méthode des infiniment petits nuls, et peut-être même des pseudo-infiniment petits. Au XIX[e] siècle, depuis Cauchy, la méthode des indéfiniment petits est à peu près seule employée dans l'exposé scientifique du calcul infinitésimal; la méthode des infiniment petits nuls, avec son langage conventionnel à peine plus court, est tombée en discrédit, parce qu'il est impossible d'en démontrer rigoureusement les règles, sans les faire précéder des règles équivalentes

et plus claires de la méthode des indéfiniment petits, comme l'avaient fait Leibniz et Newton, il y a deux siècles.

6. Historique. I. KEPLER, dans la *Nova stereometria doliorum* (1615), a, le premier probablement, introduit dans la géométrie la notion vague des infiniment petits en regardant le cercle comme composé d'une infinité de triangles ayant les parties indivisibles de la circonférence pour bases et le centre pour sommet commun. La sphère est, de même, la somme d'une infinité de pyramides. Kepler décompose d'autres solides d'une manière analogue. Voici ses paroles sur le cercle : « Circuli circumferentia partes habet totidem, quot puncta, puta infinitas; quarum quaelibet consideratur ut basis alicujus trianguli aequicruri, cruribus AB (sc. radius) : uti ita triangula in area circuli insint infinita, omnia verticibus in centro coeuntia (*Opera omnia*, IV, pp. 557-558) » Pour la sphère, il dit (Ib. p. 563) : « Corpus sphaerae .... potestate in se continet infinitos veluti conos, verticibus in centro sphaerae coeuntes, basibus, quarum vicem sustinent puncta, in superficie stantibus. » Dans le même ouvrage (p. 634), il observe qu'aux environs du maximum d'une grandeur variable, il y a une variation insensible de cette grandeur.

Évidemment, il y a loin de là à une vraie théorie des maxima et des minima ou à une doctrine systématique sur les infiniment petits. Mais la méthode hardie de Kepler fit une impression profonde sur ses contemporains. GULDIN, tout en critiquant les démonstrations de Kepler, exprime bien la fascination qu'elles exerçaient sur lui dans les paroles suivantes : « Quemadmodum, disputante S. Paulo coram rege Agrippa, hic exclamaverit et dixerit Paulo : *in modico me suades christianum fieri*, sic et mihi disputans Keplerus in modico persuadet, ut Keplerianus fiam, nisi me absterreret infinitorum istorum tractatio et purioris geometriae principes, auctores et sectatores (*Kepl. Opp.*, IV, p. 648, note 9). »

Il importe de remarquer les expressions dont se sert Kepler en parlant de la sphère : « Le volume de la sphère contient *virtuellement* (potestate) *comme* (veluti) une infinité de cônes. » N'entrevoit-il pas les objections que l'on peut faire contre son procédé trop sommaire ?

II. CAVALIERI, qui a lu la *Nova stereometria* de Kepler et la cite dans la préface de son livre, avec les écrits d'Euclide et d'Archimède, est, à proprement parler, l'auteur de la *Méthode des indivisibles*. Cette méthode consiste essentiellement à déduire le rapport des aires de deux figures planes (ou des volumes de deux solides) de la considération des rapports

de toutes les droites parallèles à une droite (ou de toutes les sections planes parallèles à un plan) de direction donnée, COMME SI une aire était une somme de longueurs (ou un volume une somme d'aires).

Nous disons COMME SI, pour traduire exactement la pensée de Cavalieri telle qu'il l'a exprimée dans la préface de son livre et ailleurs. « Quoad continui compositionem, dit-il, manifestum est ex praeostensis, *ad ipsum ex indivisibilibus componendum* nos *minime* cogi : solum enim continua sequi indivisibilium proportionem et e converso, probare intentum fuit; quod quidem cum utraque positione stare potest. Tandem vero dicta indivisibilium aggregata non ita pertractavimus, ut infinitatis rationem propter infinitas lineas seu plana subire videntur, sed quatenus finitatis quandam conditionem et naturam sortiuntur, ut propterea et augeri et diminui possint, ut ibidem ostensum fuit, si ipsa prout diffinita sunt accipiantur (p. 483 de l'éd. de 1653). » Au reste, Cavalieri trouvait lui-même des difficultés dans cette méthode, comme il le dit aussi dans la Préface; il y parle de la considération de ce nombre *innommable* de parties qu'il considère dans les aires et les volumes comme d'un artifice semblable à celui des algébristes faisant des calculs sur les nombres incommensurables. « Non aliter ipse ergo indivisibilium sive linearum, sive planorum congerie, licet quoad eorumdem numerum innominabili, surda ac ignota, quoad magnitudinem tamen conspicuis limitibus clausa, ad continuorum investigandam mensuram usus sum. » Pour prévenir les objections naissant de ces difficultés, il consacre le livre VII de son ouvrage à démontrer autrement les résultats obtenus par la méthode des indivisibles, tout en disant que c'eût été un crime de ne pas communiquer celle-ci aux géomètres.

III. ROBERVAL, dans son *Traité des Indivisibles*, composé peu après celui de Cavalieri (*Ouvrages de mathématique*, La Haye, 1731, pp. 205-290) entend par là, des grandeurs aussi petites que l'on veut, et ayant pour limite zéro; les indivisibles sont de même espèce que les grandeurs dont elles sont les éléments, quoique dans le langage on paraisse dire le contraire. « Pour tirer des conclusions par le moyen des indivisibles, il faut supposer que toute ligne, soit droite, soit courbe, se peut diviser en une infinité de parties ou petites lignes toutes égales entre elles, ou qui suivent telle progression que l'on voudra... Or, d'autant que toute ligne se termine par des points au lieu de lignes on se servira de points; et puis, au lieu de dire que toutes les petites lignes sont à telle chose en certaine

raison, on dira que tous ces points sont à telle chose en ladite raison (p. 208) ». « La superficie se divise aussi en une infinité de petites superficies, lesquelles sont égales, ou ont égale différence, ou gardent entre elles quelqu'autre progression... Et d'autant que les superficies sont enfermées dans les lignes, au lieu de comparer les superficies, on comparera les lignes à une autre chose... De même, les solides se divisent en une infinité de petits solides ou égaux, ou qui gardent quelque proportion, comme il a été dit des surfaces; et d'autant que les solides sont terminés par des surfaces, au lieu de dire que ces petits solides sont au grand solide pris autant de fois, je dis, l'infinité des surfaces sont à la plus grande prise autant de fois.... Par tout ce discours, on peut comprendre que *la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes* et compose la ligne entière. L'*infinité de lignes représente l'infinité des petites superficies* qui composent la superficie totale. L'*infinité de superficies représente l'infinité de petits solides* qui composent ensemble le solide total (p. 209). »

Il est impossible, comme on le voit, d'expliquer plus clairement le langage conventionnel employé dans la méthode des indivisibles.

Roberval s'occupe aussi de la légitimité du procédé de sommation qu'il emploie, parce qu'en apparence, il néglige certaines quantités dans ses calculs. Il fait observer, à propos d'un cas simple, traité dans son introduction, que ce qu'il trouve en trop est aussi petit que l'on veut et il conclut : « Puisqu'on voit que l'excès diminue toujours, il s'anéantira enfin dans la division indéfinie (p. 208). »

IV. Pascal a aussi beaucoup employé la méthode des indivisibles, et, comme plusieurs géomètres du temps, il a expliqué clairement pourquoi elle est rigoureuse. Voici à ce sujet, un extrait caractéristique de sa lettre à M. Carcavi (10 déc. 1659) : « J'ai voulu faire cet avertissement, pour montrer que tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles, se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens; et qu'ainsi l'une des méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler : ce qui ne peut blesser les personnes raisonnables quand on les a une fois averties de ce qu'on entend par là. Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté, dans la suite, d'user du langage des indivisibles, *la somme des lignes* ou *la somme des plans;* et ainsi, quand je considérerai, par exemple, le diamètre d'un demi-cercle divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où soient menées les

ordonnées ZM, je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, la *somme des ordonnées*, qui semble ne pas être géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace d'un demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée... (*Œuvres*, édit. Hachette, 1858, t. II, p. 544). » A la page précédente, après avoir fait une substitution d'infiniment petits, il dit : « Ce qui ne change rien, puisque la somme des portions substituées ne diffère de la somme des véritables que d'une quantité moindre qu'aucune donnée. »

V. Wallis, dans son *Arithmetica Infinitorum*, traduit en calcul la méthode des indivisibles de Cavalieri, mais sans rien y ajouter au point de vue de la rigueur; sous ce rapport, il est inférieur aux précédents. « Il composa ce traité, dit Maclaurin, comme il nous l'apprend, avant qu'il eût lu les écrits d'Archimède et il propose ses théorèmes sous une forme moins exacte. Il suppose ces progressions continuées jusqu'à l'infini et il cherche, par une espèce d'induction, la proportion de la somme des puissances $[0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k]$ au produit $[(n+1)\,n^k]$ qui résulte, en prenant la plus grande puissance aussi souvent qu'il y a de termes (*Traité des Fluxions*, éd. franç., t. I, p. XLIX). » Cependant, malgré les inexactitudes de langage de Wallis (il emploie, par exemple, le signe $\frac{1}{\infty}$ pour désigner une partie infiniment petite d'un angle; voir p. 367 du tome I des *Opera Mathematica*, 1695), ça et là, il indique la raison pour laquelle il peut négliger certaines quantités vis-à-vis d'autres. Ainsi, dans la proposition XX, il trouve que le rapport de $1+4+9+\cdots+n^2$ à $(n+1)\,n^2$ est $\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$, puis il dit : « Cum autem crescente numero terminorum, excessus ille supra subtriplum ita continuo minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat (ut patet;) si in infinitum procedatur prorsus evaniturus est. »

VI. Fermat a employé plus d'une fois le langage conventionnel de la méthode des indivisibles, mais il a eu soin de faire remarquer, comme *plus tard* Roberval et Pascal, que les erreurs commises en apparence sont nulles en réalité, parce que, si elles existaient, on pourrait

certainement les rendre moindres que toute quantité donnée. Dans sa théorie des maxima et des minima, il a même imaginé un terme pour dire que deux quantités sont égales à un indéfiniment petit près, négligeable dans la question traitée: « Id comparo primo solido A^2 in B — A^3, tanquam essent aequalia, licet reverà aequalia non sint et hujusmodi comparationem vocavi *adaequalitatem* (*Varia opera*. p. 66). »

Dans son écrit si remarquable sur la quadrature des courbes, il indique d'ailleurs en quelques mots, mais avec précision, pourquoi, dans une limite de sommes d'indéfiniment petits considérée par lui, il néglige certains petits parallélogrammes et, à ce propos, il ajoute ces mots : *Archimedaeâ prolixiore demonstratione facillime firmandum* (Ib. p. 46). Dans une lettre célèbre à Gassendi (Ib. p. 201-204), il a donné un exemple de ces démonstrations à la manière d'Archimède.

VII. Newton, comme nous l'avons dit (p. 17, note 16; 18, note 18) a maintes fois employé le langage des infiniment petits, et probablement il l'a fait à dessein pour ne pas dévoiler complètement le secret de ses découvertes. De Morgan (*On the Early History of Infinitesimals in England*, Phil. Mag., 1852, t. XLI, pp. 321-330), égaré par cette obscurité calculée, a cru pouvoir démontrer que Newton ne s'était converti à la méthode des limites et n'avait rejeté les indivisibles qu'entre 1693 et 1704. Mais cet historien n'a pas tenu compte d'un passage (indiqué plus haut, p. 18, note 18) du premier écrit de Newton, de ses lettres de 1676 à Leibniz et surtout des paroles si précises qui terminent la première section des *Principes* (voir p. 17, note 16).

Dans cette section des *Principes*, Newton expose avec rigueur les principes *généraux* relatifs aux limites de sommes et de rapports d'indéfiniment petits, c'est-à-dire les principes de la *vraie* méthode infinitésimale. Grâce à ces principes, ses démonstrations sont aussi rigoureuses que les démonstrations compliquées des anciens, aussi simples et aussi rapides que les démonstrations insuffisantes de ceux qui emploient les indivisibles. Voici les paroles de Newton : « Praemisi vero haec Lemmata, ut effugerem taedium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum Indivisibilium. Sed quoniam durior est Indivisibilium hypothesis, et propterea methodus illa minus Geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas et rationes, primasque nascentium, id est ad limites summarum et rationum deducere; et propterea limitum illorum

demonstrationes qua potui brevitate praemittere. His enim idem praestatur quod per methodum Indivisibilium; et principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas et rationes partium determinatarum, sed summarum et rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum praecedentium Lemmatum semper revocari. »

VIII. Leibniz. Il existe relativement à Leibniz une tradition inexacte d'après laquelle il aurait admis l'existence des pseudo-infiniment petits. *A priori*, cela semble bien peu probable, puisque Leibniz a appris les quadratures sous la direction de Huygens, dans les écrits de celui-ci, de Grégoire de Saint Vincent et de Pascal, c'est-à-dire d'auteurs qui se servaient de la méthode des Anciens, ou de celle des indivisibles, mise sous une forme rigoureuse.

En réalité, Leibniz a employé, comme la plupart de ses contemporains, le langage conventionnel de la méthode des indivisibles, mais en l'interprétant dans le sens de la méthode des indéfiniment petits. Quelques citations caractéristiques suffiront pour le prouver (Voir aussi p. 12, note 9).

Dans le discours préliminaire de la *Théodicée*, au n° 70, on trouve les paroles suivantes. (*Opera philosophica*, éd. Erdmann, 1840, p. 499, col. 1): « On s'embarrasse de même dans les séries des nombres, qui vont à l'infini. On conçoit un dernier terme, un nombre infini, ou un infiniment petit; mais tout cela ne sont que des fictions. Tout nombre est fini et assignable, toute ligne l'est de même et les infinis ou infiniment petits n'y signifient que des grandeurs qu'on peut prendre aussi grandes ou aussi petites que l'on voudra, pour montrer qu'une erreur est moindre que celle qu'on a assignée, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune erreur : ou bien on entend par l'infiniment petit l'état de l'évanouissement ou du commencement d'une grandeur, conçus à l'imitation des grandeurs déjà formées. »

On retrouve la même doctrine dans un grand nombre d'autres passages des écrits de Leibniz, par exemple, dans celui-ci, extrait d'une lettre à M. Dangicourt du 11 septembre 1716 (Leibniz est mort deux mois après, le 14 novembre 1716): « Je leur (à divers partisans des pseudo-infiniment petits) témoignai que je ne croyais point qu'il y eût des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinitésimales, que ce n'était que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement.... Plus on faisait la proportion ou l'intervalle grand entre ces

degrés, plus on approchait de l'exactitude, et plus on pouvait rendre l'erreur petite et même la retrancher tout d'un coup par la fiction d'un intervalle infini, qui pouvait toujours être réalisée à la façon de démontrer d'Archimède. Mais comme M. le Marquis de l'Hospital croyait que par là je trahissais la cause, ils me prièrent de n'en rien dire (*Œuvres*, édition Dutens, III, p. 500). »

On a vu plus haut (n° 3, I, et note 4) que Leibniz définit la différentielle d'une fonction y de x, *absolument comme Cauchy l'a fait plus tard, en posant* $dy = y'dx$, dx *étant quelconque*. Voici une note caractéristique de lui sur ce point, où il fait observer que, sur la figure que nous avons reproduite à la page 9, dx est représenté par une grandeur finie. En même temps, il donne une interprétation géométrique des différentielles d'ordre supérieur : « Unum adhuc addere placet, ut omnis de realitate differentiarum cujuscumque gradus tollatur disputatio; posse eas semper exprimi rectis ordinariis proportionalibus. Nempe sit linea quaecumque, cujus ordinatae crescunt, vel decrescunt; poterunt ad eumdem axem in iisdem punctis applicari ordinatae secundae ad novam lineam terminatae, proportionales differentiis primi gradus, seu elementis ordinatarum lineae primae. Quod si jam idem fiat pro secundis ordinatis, quod factum est pro primis, habebuntur ordinatae ad lineam tertiam, proportionales primarum ordinatarum differentio-differentialibus, seu differentiis secundis; seu, quod idem est, secundarum ordinatarum differentiis primis. Et eodem modo etiam differentiae tertiae, et aliae quaecumque per quantitates assignabiles exponi possunt. Modum autem differentiis primi gradus proportionales exhibendi rectas ordinarias jam tum explicui, cùm primum hujus calculi elementa traderem in Actis octobris 1684. Nempe inspiciatur ibi Tabula 6. fig 29, reperietur dx, elementum abscissae AX vel x, *repraesentari per rectam assignabilem in figura separatim positam*, et deinde dy, elementum ordinatae XY seu y, repraesentari per rectam quae sit ad dictam dx jam assignatam, ut XY ordinata, est ad XD interceptam in axe inter tangentem et ordinatam (Dutens, III, pp. 332-333; Gerhardt, V, p. 327. Extrait des *Acta Eruditorum* de 1695). »

Mais, si Leibniz savait parler au besoin, aussi bien que Newton, le langage rigoureux de la méthode des indéfiniment petits, il ne voulait pas néanmoins que l'on fût trop scrupuleux, même sur le fond des doctrines : « Ego quidem fateor magni me eorum diligentiam facere, qui accurate omnia ad prima principia usque demonstrare contendunt, et in talibus

quoque studium non raro posuisse ; non tamen suadere, ut nimia scrupulositate arti inveniendi obex ponatur, aut tali praetextu optime inventa rejiciamus, nosque ipsos eorum fructu privemus (Dutens, III, p. 328; Gerhardt, V, 322) »

IX. Jean Bernoulli a eu avec Leibniz une longue controverse sur l'existence de quantités infinitésimales, différentes de zéro et pourtant inférieures à toute grandeur donnée, autrement dit des pseudo-infiniment petits (Voir *Leibnitii et Johannis Bernoullii Commercium philosophicum et mathematicum*, Lausannae et Genevae, 1745; tome I, pp. 370-440, ou le volume correspondant de l'édition de Gerhardt). Voici le résumé de la pensée de J. Bernoulli : « Dico... infinita et infinita parva non posse demonstrari existere, sed etiam non posse demonstrari non existere; probabile tamen esse existere (Page 402). »

X. De l'Hospital (1667-1704) publia, en 1696, le premier traité didactique de Calcul différentiel, sous le titre : *Analyse des infiniment petits pour servir à l'intelligence des lignes courbes.* Ce livre, réimprimé plusieurs fois (1715, 1768, 1780; traduction anglaise, 1730; traduction latine à Vienne, 1764, 1790) devint, au XVIII[e] siècle, le manuel de tous ceux qui s'occupaient de mathématiques supérieures, et il a contribué plus qu'aucun autre à répandre des idées vagues sur le calcul différentiel. De l'Hospital est élève de Jean Bernoulli et il semble qu'il ait adopté les idées de son maître, sur l'existence des pseudo-infiniment petits, d'après les deux postulats sur lesquels il fonde son Traité. Ces deux postulats sont les suivants : 1° « On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite. » 2° « On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit; lesquels déterminent par les angles qu'ils font entre eux, la courbure de la ligne (Pages 2, 3 de l'édition de 1715). »

On observera ici que les infiniment petits de l'Hospital et de Bernoulli ne sont définis nulle part; le sens raisonnable que l'on peut donner aux deux principes n'est pas indiqué; ensuite, ces principes ne sont pas *démontrés*, quoiqu'ils puissent l'être, dans les cas où l'auteur les emploie, mais pour le second, cela n'est pas aussi facile qu'il le pense : « Les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce traité

et sur lesquelles seules il est appuyé, me paraissent si évidentes, que je ne crois pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des lecteurs attentifs. Je les aurais même pu démontrer *facilement* à la manière des anciens (Préface, p. XV). »

XI. MACLAURIN. Le *Traité des fluxions* de Maclaurin, publié en 1742, est aussi rigoureux que le livre de l'Hospital l'est peu; il contient d'ailleurs des recherches originales de l'auteur sur diverses questions difficiles. Mais la majeure partie de cet excellent ouvrage a une forme géométrique qui en rend la lecture laborieuse. On préféra donc aux démonstrations exactes de Maclaurin, la clarté superficielle de celles de l'Hospital dans son *Analyse des infiniment petits*.

XII. EULER, dans ses *Institutiones calculi differentialis* (1755) et dans ses *Institutiones calculi integralis* (1768-70), donna un exposé systématique, assez prolixe, mais suffisamment rigoureux, du calcul infinitésimal, fondé sur la théorie des infiniment petits NULS. Comme l'idée fondamentale de cette méthode du célèbre géomètre de Bâle est exposée plus haut (291, II), nous nous contenterons de citer le passage suivant du premier de ces ouvrages (Édition de Zurich de 1787, p. 63, n° 84) : « Si quantitas tam fuerit parva, ut omni quantitate assignabili fit minor, ea certe non poteret non esse nulla, namque nisi esset = 0, quantitas assignari posset ipsi aequalis, quod est contra hypothesin. Quaerenti ergo, quid sit quantitas infinito parva in Mathesi, respondemus eam esse revera = 0; neque ergo in hac idea tanta mysteria latent, quanta vulgo putantur, et quae pluribus calculum infinite parvorum admodum suspectum reddiderunt. Interim tamen dubia, si quae supererunt, in sequentibus, ubi hunc calculum sumus traditurі, funditus tollentur. »

XIII. POISSON, CAUCHY, DUHAMEL, NAVIER, COURNOT. POISSON, au n° 12 de sa *Mécanique* (2e édition, 1833; première édition, 1811), admet l'existence des pseudo-infiniment petits : « Un infiniment petit est une grandeur moindre que toute grandeur donnée de la même nature..... Ainsi, le temps croît par des degrés moindres qu'aucun intervalle qu'on puisse assigner.... Les infiniments petits ont donc une existence réelle, et ne sont pas seulement un moyen d'investigation imaginé par les géomètres..... (p. 14). Le principe fondamental de l'Analyse infinitésimale consiste en ce que deux quantités finies, qui ne diffèrent l'une de l'autre que d'un infiniment petit, doivent être regardées comme égales, puisqu'on ne saurait assigner entre elles aucune inégalité, aussi petite que l'on voudra (pp. 15-16). »

CAUCHY, en 1821, dans son *Analyse algébrique*, balaie toutes ces notions vagues en exposant, sous une forme claire et simple, la théorie des indéfiniment petits; elle a été vulgarisée plus tard par les écrits plus accessibles de DUHAMEL (*Éléments de calcul infinitésimal;* dernière édition publiée par l'auteur en 1861) et est, pour ainsi dire, universellement adoptée. Un petit nombre d'esprits seulement, séduits sans doute par l'autorité de Poisson, ont essayé de conserver les pseudo-infiniment petits, au moins partiellement. Nous en citerons deux.

NAVIER (*Résumé des leçons d'Analyse données à l'École Polytechnique;* Paris, 1840). « Il est nécessaire, dit-il, de distinguer les cas où l'on regarde ainsi l'accroissement Δx de la variable indépendante comme s'approchant indéfiniment de zéro, ou ayant une valeur indéterminée plus petite que tout nombre donné. Cet accroissement est dit alors infiniment petit.... Si Δx et Δy sont supposées infiniment petites, ces différences sont alors appelées les *différentielles* des variables x et y; et pour distinguer ces cas on emploie la caractéristique d à la place de Δ, en écrivant dx et dy. La limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ à mesure que Δx diffère de moins en moins de zéro est exprimée par $\frac{dy}{dx}$ (p. 8). » On peut entendre ces paroles dans le sens (raisonnable) des infiniment petits nuls d'Euler, ou dans le sens (absurde) des pseudo-infiniment petits de Poisson. Le passage suivant semble plutôt écrit dans ce dernier système : « On doit se représenter la variable x comme prenant successivement des valeurs dont chacune surpasse la précédente de la quantité dx supposée infiniment petite, c'est-à-dire plus petite que toute grandeur donnée.... Chaque fois que x croit de la différentielle dx, y varie de la différentielle correspondante dy (p. 10). »

COURNOT, dans son *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du Calcul infinitésimal* (Paris, Hachette, 1841), expose (tome I, pp. 81-101) une théorie des infiniment petits extrêmement peu claire, qu'il attribue à Leibniz, mais qui, en réalité, est tantôt celle d'Euler, tantôt celle de Poisson. Au fond, il semble adopter plutôt cette dernière : « La méthode [pseudo]-infinitésimale, dit-il, ne constitue pas seulement un artifice ingénieux : elle est l'expression naturelle du mode de génération des grandeurs physiques qui croissent par éléments plus petits que toute grandeur donnée (p. 86). »

Gand, imp. C. Annoot-Braeckman, Ad. Hoste, succr.

APPENDICE.

7. Additions. I. Viète (1540-1603), avant Kepler, a employé la considération de l'infini, dans son ouvrage intitulé : *Variorum de Rebus Mathematicis Responsorum liber VIII*. Le chapitre XVIII (pp. 398-400 de l'édition de Schooten), a pour titre : *Polygonorum circulo ordinate inscriptorum ad circulum ratio.* De même, dit-il, qu'Archimède a pu trouver l'aire de la parabole, en y inscrivant une série infinie de triangles ayant un rapport rationnel, de même ne peut-on pas obtenir la quadrature du cercle en y inscrivant une série infinie de triangles ayant entre eux un rapport irrationnel? Partant de cette idée, il calcule successivement les aires des polygones réguliers inscrits au cercle de 4, 8, 16, etc. côtés, et admettant que *est polygonum infinitorum laterum circulus ipse*, il exprime $(2 : \pi)$ au moyen d'un produit infini que l'on peut écrire sous la forme $\cos\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{4}\alpha \cos\frac{1}{8}\alpha \ldots$, α étant un demi-angle droit. Il ne semble pas que l'écrit de Viète qui contient ce curieux calcul ait été connu de Kepler, ni qu'il ait eu une influence sérieuse sur d'autres géomètres. On n'y trouve d'ailleurs aucune considération de somme ou de rapport d'infiniment petits; on ne peut donc regarder Viète comme un précurseur même lointain de Leibniz et de Newton.

II. Tacquet (1612-1660). Avant Pascal et presque aussi nettement que lui, Tacquet, géomètre anversois, a signalé, dans son ouvrage : *Cylindricorum et Annulariorum libri IV* (1651), l'insuffisance de la méthode des indivisibles prises à la lettre, et a indiqué ce qu'il faut y ajouter pour la rendre rigoureuse. Il l'appelle, avec juste raison, une méthode *per heterogenea* sans force démonstrative : « Dico demonstrationes per heterogenea institutas ad assensum non cogere nisi, quod plerumque fieri potest, ad homogenea reducantur (Scholium de la proposition douzième du livre premier). » Il indique ensuite, sur un exemple, comment il faut faire cette réduction : si deux solides sont coupés par des plans parallèles suivant des sections égales (ou ayant un rapport donné), on construira sur ces sections, dans les deux solides, des prismes ou des cylindres égaux (ou ayant le rapport donné), et limités par des plans parallèles; d'après un théorème général, démontré en tête

du livre premier, si la somme de ces prismes ou de ces cylindres, peut différer aussi peu qu'on le veut des solides correspondants, quand leur nombre croît suffisamment, le rapport des volumes de ces solides est égal à celui des sommes de prismes ou de cylindres.

Le livre de Tacquet a été complété en 1659, et réimprimé en 1669 et 1707; il est cité avec éloge entre autres, par Wallis, Sluse, Huygens, Barrow. Il est difficile de ne pas admettre une influence sérieuse de Tacquet au moins sur ce dernier, qui, dans la XVI[e] des *Lectiones mathematicae* (1664-1666; publiées en 1683) expose le sens raisonnable de la méthode des indivisibles, comme le géomètre flamand et en employant une terminologie analogue. S'il en est ainsi, il est probable que Newton lui-même, jusqu'à un certain point, aura profité indirectement des lumières contenues dans le livre de notre compatriote sur la méthode des indivisibles (Résumé d'une note manuscrite de M. C. Le Paige).

III. Barrow (1630-1677). Nous avons indiqué, parmi les précurseurs de Newton et de Leibniz surtout, ceux qui ont eu une influence directe ou indirecte sur ces deux géomètres. C'est pourquoi nous n'avons pas cité Barrow, qui a été pourtant le professeur de Newton. La méthode de Barrow pour mener les tangentes, est identique, *au fond*, à celle de Fermat; mais il emploie un algorithme meilleur, parce qu'il désigne, par une seule lettre, aussi bien l'accroissement de l'ordonnée que celui de l'abscisse, ce qui lui donne rapidement, dans les cas particuliers traités par lui, une relation équivalente à la proportion leibnitzienne $dy : dx = y : S_t$. Si Leibniz avait connu plus tôt les *Lectiones Geometricae* de Barrow (Première édition, 1670; seconde 1674), probablement elles lui auraient été d'un grand secours; mais quand il a pu les consulter, il était déjà en possession des principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale, obtenus par une voie toute différente. Ce sont les écrits de Huygens, Pascal, Grégoire de S. Vincent, Sluse, Descartes, Fermat et Cavalieri, qui ont surtout influé sur Leibniz.

Quant à Newton, il est difficile de discerner ce qu'il a pu apprendre *spécialement* de Barrow, parce que les notations de ce dernier, dont nous venons de parler, n'ont pas pour lui la même importance, comme antécédents de la méthode des fluxions, que pour Leibniz, comme antécédents du calcul différentiel. Autant qu'on peut le conjecturer, d'après les écrits de Newton, et surtout d'après la *Recensio* du *Commercium epistolicum*, c'est à Cavalieri même qu'il doit l'idée de fluxion et ce sont les écrits de

Wallis et peut-être de Grégoire de Saint Vincent(*) qui ont eu sur lui la plus grande influence.

IV. Leibniz. Voici un passage de Lacroix (*Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral;* seconde édition, t. I, Paris, Courcier, 1810; introduction, p. xv) sur Leibniz, qu'il est intéressant de citer en confirmation de ce que nous en disons nous-même : « Leibnitz crut sans doute que ceux qui seraient en état de faire usage du Calcul différentiel, en saisiraient facilement l'esprit, en le rapprochant de la méthode des anciens; car il négligea d'entrer dans aucun détail à cet égard, et son silence fut imité par les Bernoulli et par l'Hôpital ; mais quand il fut attaqué sur ce sujet, il prouva par ses réponses, qu'il y avait mûrement réfléchi. Dans toutes les occasions, il compare sa méthode avec celle d'Archimède, et fait voir qu'elle n'en est en quelque sorte qu'un abrégé, plus approprié aux recherches, mais qu'au fond elle revient au même; car au lieu de supposer les différentielles infiniment petites dans le fait, il suffit seulement de concevoir qu'on puisse toujours les prendre assez petites, pour que l'erreur qui résultera des omissions faites dans le calcul, soit moindre qu'une grandeur donnée ; et pour aider l'imagination de ses lecteurs, il apporte quelques exemples sensibles. Cette manière de raisonner, à laquelle il semble qu'on n'ait rien à reprocher, a été regardée de la part de Leibnitz, comme un aveu de l'insuffisance de ses principes, par Fontenelle, qui voyait s'écrouler ainsi tout l'édifice qu'il avait bâti sur les infinis. Les plaintes qu'il en porte dans la préface de sa Géométrie et qui ont été répétées dans plusieurs ouvrages, offrent un exemple de la facilité avec laquelle les erreurs passent de livre en livre, et montrent combien peu de gens prennent soin de se former une opinion indépendante de celle des autres. »

(*) Grégoire de Saint-Vincent, dans l'*Opus geometricum* (Lib. VII, *De Ductu plani in planum*, pars III, prop. 40-45, pp. 733-740), avait donné des théorèmes généraux analogues à ceux de Newton dans les *Principes* et pour la même raison : « Ne idem discursus in singulis propositionibus labore inutili, et cum molestia Lectoris repetendus esset, placuit totum exhaustionis negotium hoc loco terminis universalibus proponere ac demonstrare (p. 740) » La grandeur vraiment effrayante du livre de Grégoire de S. Vincent (plus de 1250 pages in folio) a dû rebuter bien des lecteurs de son temps; seuls ses élèves (Tacquet, par exemple), et les plus grands géomètres du temps, comme Huygens, Leibniz et probablement Newton, auront vu toute la portée des théories générales de notre compatriote sur la génération des solides et sur leur mesure.

V. D'Alembert (1717-1783), Landen (1719-1790), Poinsot (1777-1859) ont été souvent cités comme ayant contribué à réintroduire, dans l'enseignement de l'analyse infinitésimale, des idées plus précises que celles de l'Hospital. Le premier, dans plusieurs articles de l'Encyclopédie (notamment sous les mots *infini*, *infiniment petit*, *différentiel*) a esquissé les principes du calcul différentiel en recourant à la théorie des limites et, en entendant, au fond, les infiniment petits, comme Newton et Leibniz, dans le sens des indéfiniment petits. Mais son exposition, très superficielle au point de vue historique, n'est ni assez détaillée, ni surtout assez nette : ainsi il renvoie, pour les démonstrations des règles de la différentiation, à l'*Analyse des infiniment petits*, c'est-à-dire à un ouvrage fondé sur des principes vagues (*).

Ni l'esquisse de d'Alembert, ni les travaux analogues de Landen (*The Residual Analysis*, 1764), où ce géomètre, dit Lacroix, proposa une méthode qui revient à celle des limites, ne semblent avoir eu une grande influence sur les procédés d'exposition du calcul infinitésimal. Lacroix, bien qu'il fît de la méthode des limites la base de son *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* (1797), l'exclut à cause de cela même, à peu près complètement et d'une manière systématique de son grand *Traité* (Introd., p. xxxv) ; dans celui-ci, au fond, le point de départ est le développement de Taylor admis sans démonstration suffisante, comme dans la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange(**). Lacroix fait remarquer, en même temps, qu'il n'a pas cru devoir négliger la considération des infiniment petits, qui abrège et facilite considérablement, selon lui, la mise en équation des problèmes de géométrie et de mécanique.

En 1813, « le programme de l'École Polytechnique, porte qu'on exposera les principes du calcul différentiel par la considération des infiniment petits et qu'on fera voir dans les cas les plus simples, l'accord de cette méthode avec celle des limites, ou du développement en série (*Correspondance sur l'École polytechnique*, t. III, n° II, mai 1815, p. 111). »

(*) En réalité, l'ouvrage de Carnot, *Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal* (1799), ne contient guère que le développement des idées de d'Alembert et a les mêmes défauts que les articles de celui-ci, tant au point de vue scientifique qu'au point de vue historique.

(**) On peut en dire autant du petit livre de Brasseur : *Exposition nouvelle des principes du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (Liége, 1868).

Poinsot s'est inspiré de ce programme dans les fragments de son cours qui ont été publiés (*Des principes fondamentaux et des règles générales du calcul différentiel; sur le changement de la variable indépendante, ou transformation des fonctions différentielles*. Ib. p. 111-131). Il indique assez bien pourquoi cet accord subsiste, mais il ne prouve pas le principe qu'il invoque et dont il pouvait emprunter la démonstration à Newton, savoir : *qu'on ne doit jamais prendre* (dans les limites de rapport et de somme d'infiniment petits) *au lieu des différences ou éléments des grandeurs, que des quantités* (différentielles) *dont la dernière raison avec ces éléments soit la raison d'égalité*. D'ailleurs, cette définition de la différentielle est vague et même inexacte, quand la dérivée est nulle.

Poinsot ajoute que, dans l'énoncé du principe de l'égalité des dernières raisons, on en sous-entend un autre non moins important, qu'on peut nommer le principe de l'homogénéité, savoir, *que les différentielles, quelque petites qu'on les suppose, sont toujours de même nature que les grandeurs que l'on considère*. Au moyen de ce second principe, il explique, comme Tacquet, Roberval et Pascal, le vrai fondement de la méthode des indivisibles.

A la fin cependant, le langage de Poinsot rappelle celui de Poisson : « Ainsi, dit-il, l'on revient toujours d'une manière naturelle au calcul de ces infiniment petits, dont on cherche les rapports, s'il faut mesurer les affections des grandeurs qui varient par nuances insensibles, ou qu'on prend en nombre infini, s'il s'agit de mesurer ces grandeurs elles-mêmes. Cette méthode est la plus directe et la plus féconde, parce qu'elle est la plus conforme à l'idée qu'on se fait naturellement de la génération des grandeurs (p. 114). » L'existence de la dérivée, qui préoccupe déjà Lacroix (*Traité*, t. I, p. 241), lui parait à peu près évidente, pour des raisons bien singulières : « On peut même dire que le rapport de deux choses homogènes ne dépendant ni de leur nature, ni de leurs grandeurs absolues, par la définition même du rapport, la quantité $(\Delta y : \Delta x)$ a toujours une limite; et c'est ce que la considération d'une courbe et de sa tangente, dont l'existence n'est pas douteuse, fait voir d'ailleurs avec la dernière évidence (p. 115-116). » (*)

(*) *Rectification :* N° 6, XIII, ligne 5, lire : (5, II) au lieu de (291, II); ligne 9, le premier mot doit être *poterit*.

INDEX.

Abel, 1, 2.
Archimède, 1, 2, 3, note 9, 6, II.
Barrow, 3, note 7, 7, II, III.
Bernoulli (Jacques), 1, 2, 7, IV; (Jean), I, 2, 3, note 11, 5, IV, 6, IX, X, 7, IV.
Brasseur, 7, V, note.
Brioschi, 1, 2.
Carnot, 7, V, note.
Cauchy, 1, 2, 3, note 4, 4, note 22, 5, IV, 6, VIII, XIII.
Cavalieri, 2, 5, IV, 6, II.
Cayley, 1, 2.
Clebsch, 1, 2.
Cournot, 6, XIII.
d'Alembert, 7, V.
De Beaune, 3, X.
De Morgan, 6, VII.
Descartes, 2.
Duhamel, 6, XIII.
Euclide, 2, 6, II.
Eudoxe, 2, 3, note 9.
Euler, 1, 2, 6, XII.
Fermat, 1, 2, 3, note 7, 5, IV, 6, VI, 7, III.
Fontenelle, 7, IV.
Gauss, 1, 2.
Grégoire de Saint Vincent, 2, 6, VIII, 7, III, note.
Guldin, 2, p. 4, 6, I.
Hermite, 1, 2.
Hospital (Marquis de l'), 5, IV, 6, VIII, X.
Huygens, 2, 6, VIII, 7, II.
Jacobi, 1, 2.
Kepler, 2, 5, IV, 6, I, II, 7, I.
Kronecker, 1, 2.
Lacroix, 3, note 9, 7, IV, V.
Lagrange, 1, 2, 7, V.
Landen, 7, V.
Legendre, 1, 2.
Leibniz, 1, 2, 3, 4, notes 17, 22, 23, 5, IV, 6, VIII, IX, 7, III, IV.
Le Paige, 7, II.
Maclaurin, 1, 2, 6, V, XI.
Navier, 6, XIII.
Neper, 2.
Newton, 1, 2, 3, note 6, 4, 5, I, 6, VII, 7, II, III.
Pascal, 2, 5, IV, 6, IV, VI.
Pappus, 2.
Pezenas, 1.
Poinsot, 7, V.
Poisson, 5, IV, 6, XIII.
Riemann, 1, 2.
Roberval, 2, 5, IV, 6, III.
Sluse, 2, 3, note 7, 7, II.
Sylvester, 1, 2.
Tacquet, 7, II.
Viète, 7, I.
Wallis, 2, 6, V, 7, II.
Weierstrass, 1, 2.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

CHAPITRE PREMIER. **Inventeurs et précurseurs** 1

1 Inventeurs : Leibniz, Newton, Jacques et Jean Bernoulli, Maclaurin, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Riemann, Clebsch, Hermite, Weierstrass, Kronecker, Sylvester, Cayley, Brioschi. 1

2. Précurseurs : I. Eudoxe, Euclide, Archimède, Pappus. II. Neper, Kepler, Cavalieri, Grégoire de Saint Vincent, Descartes, Roberval. Pascal, Sluse, Fermat, Wallis, Huygens 3

CHAPITRE II. **Premiers principes du Calcul différentiel**, par LEIBNIZ et NEWTON 7

3. Nouvelle méthode de recherche des Maxima et des Minima et aussi des tangentes, applicable même dans le cas d'expressions fractionnaires et irrationnelles, et calcul remarquable y relatif, par G G. L. 7

4. Principes du Calcul des fluxions, par I. Newton 16

CHAPITRE III. **Indéfiniment petits Infiniment petits et pseudo-infiniment petits** 20

5. Définition. Indéfiniment petit (ou évanouissant). Infiniment petit (nul). Pseudo-infiniment petit 20

6. Historique Kepler, Cavalieri, Roberval, Pascal, Wallis, Fermat, Newton, Leibniz, Jean Bernoulli, de l'Hospital, Maclaurin, Euler, Poisson, Cauchy, Duhamel, Navier, Cournot. 23

APPENDICE. Additions.

7. Viète, Tacquet, Barrow, Leibniz, d'Alembert, Landen, Lagrange, Lacroix, Poinsot. Notes sur Grégoire de Saint Vincent, Carnot, Brasseur 33

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Gand, imp. C. Annoot-Braeckman, Ad. Hoste, succr.

RETURN TO the circulation desk of any
University of California Library
or to the
NORTHERN REGIONAL LIBRARY FACILITY
Bldg. 400 Richmond Field Station

381

---

ythe.Stanford.EDU> at AA_GRAPELINK

Contents ----------

rec 11/3/97
ret. 11-7-97
Thanks!

US
STRICTED

U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037199985

QA1
M34
v.1
106243